

Dinâmica
dos

Fluidos

DINÂMICA dos FLUIDOS

— Livro do IMPA — Descrição do Curso.

① Modelagem Matemática:

Leis da termodinâmica (mais importante para gases)

- ① esforços elementares sobre as partículas de um fluido (tensores)
- ② leis de Newton \rightarrow derivadas das eq. de movimento (Euler, N-S)

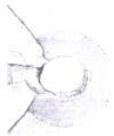


- ① Teoremas de Conservação de Kelvin
- ② Teorema de Helmholtz (M-T pg 168)

② Escoamentos de fluidos incompressíveis (Hidrodinâmica)

- ① inviscidos: ② escoamento rotacionais

③ $\left. \begin{array}{l} \text{Teoria do potencial} \\ \text{Variáveis Complexas} \end{array} \right\}$ aplicações conformes
Teorema de Blasius



- ④ escoamento rotacionais (com vorticidade)

- ⑤ Funções Complexas com Singularidades

⑥ levemente viscosos:

- ⑥ análise dimensional \Rightarrow análise assintótica \Rightarrow noções de camada limite
(eq. de Prandtl)

① Escoamentos de fluidos compressíveis (dinâmica de gases)

Leis de Conservação (edp's hiperbólicas)

problema de Riemann

Tópicos:

- ① Problemas de Fronteira livre : propagação de ondas (?)
onda de superfície, ondas internas.
- ② Introdução à Din. dos Fluidos,
Geofísica.



- H. Lamb, Hydrodynamics, 6th ed.
Cambridge University Press (1932)
- L.D. Landau & EM Lifshitz, Fluid Mechanics, 2nd. ed., Pergamon, 1987

- ③ Bibliografia: → xerox das notas

(amplo)

- L.M. Milne-Thomson, "Theoretical Aerodynamics"
Dover, 4th ed., 1973. → aplicações de variáveis complexas.
"Theoretical Hydrodynamics", Dover '96.

- ** → G.K. Batchelor - An Introduction to Fluid Dynamics,
Cambridge Univ. Press., 1967

- * → AJ Chorin & JE Marsden - A Mathematical Introduction
to Fluid Mechanics, 2nd ed., Springer Verlag,

1990

- DJ Acheson, Elementary Fluid Dynamics
Oxford Univ. Press, 1990

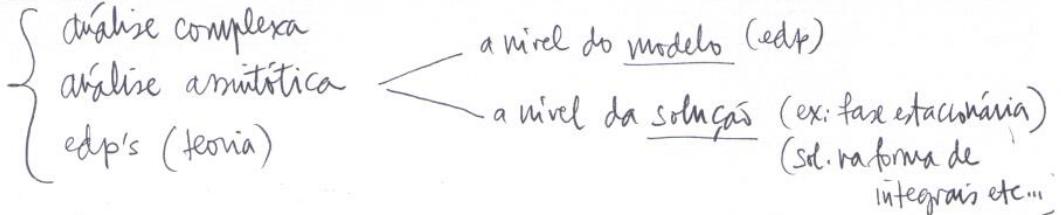
* usei mais (consulta biblioteca)

- R. Courant & K.O. Friedrichs - Supersonic Flow and Shock Waves
Springer Verlag, 1976 → gases

- G. Whitham - Linear and Nonlinear Waves, John Wiley, 1974

- J. Pedlosky - Geophysical Fluid Dynamics → ondas
Springer, 2nd. ed. 87
- A. Majda - Intro. to PDEs and Waves for the Atmos. and Ocean
Courant Lect. Notes, AMS, 2003

Matematicamente falando veremos ingredientes de Modelagem Matemática:

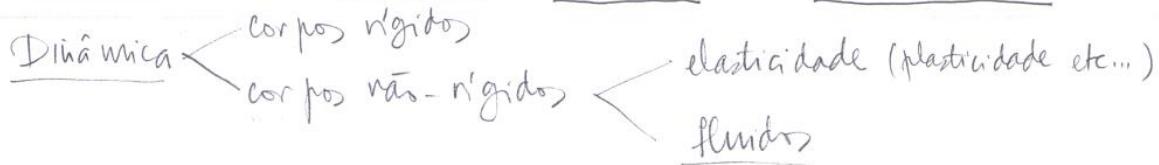


- ① Histórico de fluidos (Von Neumann lecture = G. Birkhoff, Numerical Fluid Dynamics, SIAM Review, Vol 25, No 1, Jan 83)

MODELO FÍSICO

- ② Descrição Geral (rápida descrição da Física - Cap 1 - Batchelor)

ASPECTOS INTUITIVOS & TERMINOLOGIA



O que é um fluidos?

líquido = líquido ou gás. líquido tem volume definido (forças intermoleculares)

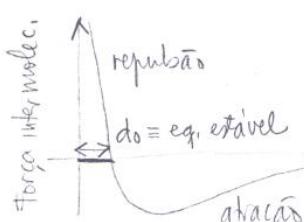
gás preenche qq container (volume n-definido)

fluido = não resiste a forças cisalhantes ou tensões sem se mover. (sólido sim).

líquido e sólido = moléculas estão arranjadas juntas o suficiente, tão próximas quanto as forças repulsivas (moleculares) permitirem.

Batch Pg 3

Nbs: gás $\rightarrow 10 * d_0$



d_0 + caminho livre médio
... (relacionado às colisões)

$$d_0 = \Theta(10^{-8}) \text{ cm}$$

$\rightarrow d$

e.f. Resnick-Halliday, Física I-2
LTC pag 644

Obs 1

DF 4

do < componentes característico do problema
 \Rightarrow visão do contínuo \Rightarrow edp's. (macroscópica)

Obs 2 : **Sólido** = arranjo das moléculas (partículas) é virtualmente permanente

Fluido = não é permanente: partículas vizinhas em $t=0$ podem estar distantes em $t \gg 1$.



gases muito rarefeitos = "d₀" pode ser grande o suficiente de forma que edp (contínuo) não vale. Temos que trabalhar com sistema de partículas.

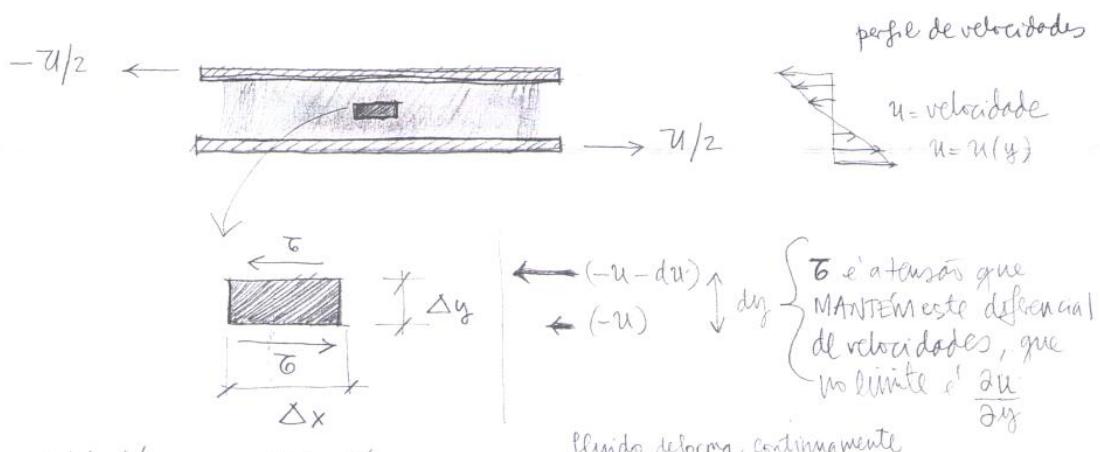
D) Viscosidade, Fricção e escoamento ideal

- Todo o fluido tem viscosidade, que causa fricção.
- Importância da fricção (no escoamento) depende do tipo de fluido e/ou da configuração geométrica do escoamento:

viscosidade \Leftrightarrow fricção
 turbulência \Leftrightarrow geração de tensões cisalhantes \rightarrow Eddy viscosity = viscosidade turbulenta (ou turbulenta)

viscosidade (popular) = quanto "grudante" o fluido é.

viscosidade (físico) = em termos gerais, é uma medida da resistência do fluido ao escoamento:



Modelo clássico → as laboratórios.

Tensão de deformação

(por unidade de tempo = diferencial de velocidade $\frac{\partial u}{\partial y}$)

Fluido deforma continuamente

σ é a tensão que MANTÉM este diferencial de velocidades, que no limite é $\frac{\partial u}{\partial y}$

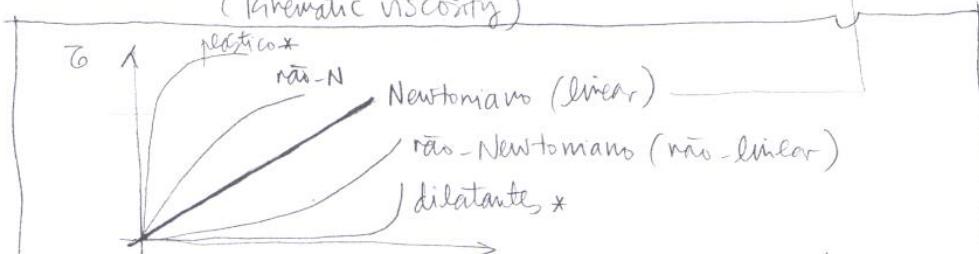
$$\sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Modelo para a transferência da "quantidade de movimento"

(matemática) viscosidade (constante = boa aproximação em geral)

$$\tau = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \rho = \text{densidade} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

→ viscosidade cinemática
(kinematic viscosity)



$\mu \downarrow$ quando $T \uparrow$, T = temperatura

Caso: óleo muito viscoso pela manhã ($T \downarrow$) \Rightarrow dificuldade de "pegar"
motor não consegue "rodar"

gases

$\mu \uparrow$ quando $T \uparrow$

Viscosidade também pode depender da pressão.
(temperatura é mais importante)

Ex: água, ar, gases são essencialmente Newtonianos

Ar	20°C	0,018
Água	20°C	1,000
Óleo lubrificante		
SAE 10	15°C	100
SAE 30	15°C	400

interno \leftarrow nos EUA
verão \leftarrow

$\mu_{\text{centípole}} = \text{mPa.s}$

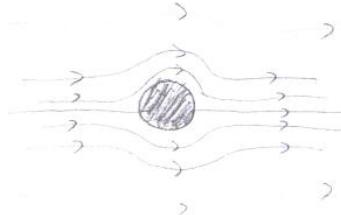
(10^{-6})

$N = \text{kg.m}^{-2}$

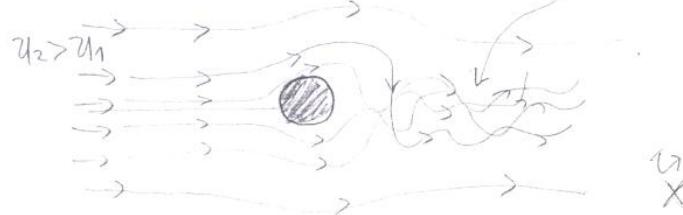
$P_n = \text{Pascal} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} = [\text{pressão}]$

Obs: fluido sem viscosidade e/ou escoamento sem turbulência \Rightarrow
 \Rightarrow escoamento ideal. (fluído ideal)
(não tem mecanismos dissipativos)

Obs: escoamento laminar



escoamento turbulento



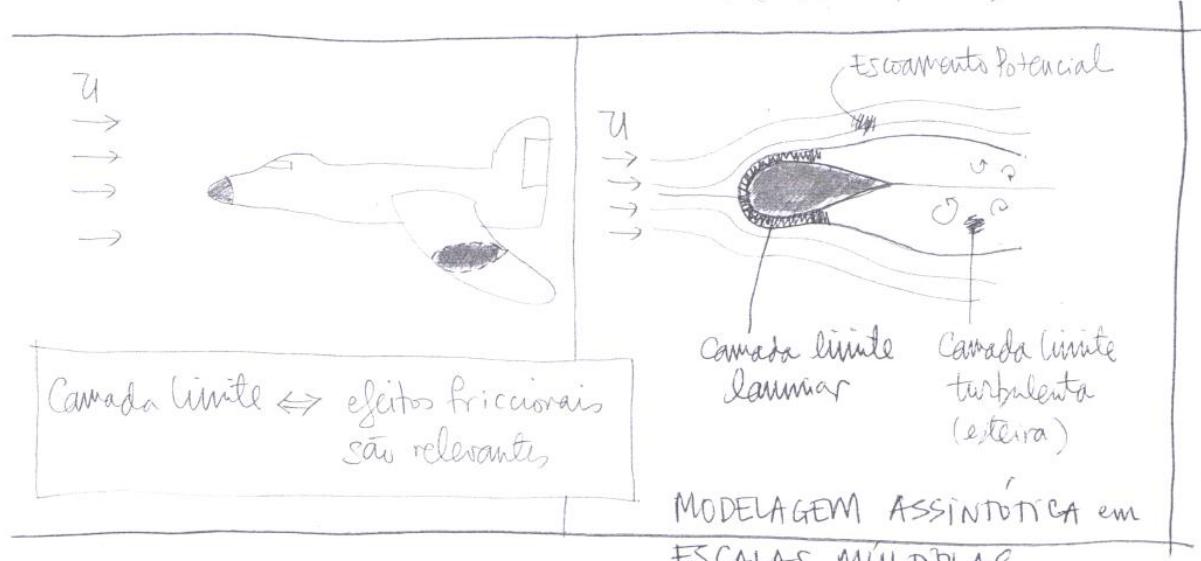
componente
desordenada
(aleatória)
do
escoamento

Comprimibilidade e Incomprimibilidade

gases = compressíveis

Líquidos = em geral, incompressíveis

Contra exemplo: propagação de som \Rightarrow comprimibilidade do líquido é importante
 \rightarrow (onda de pressão)

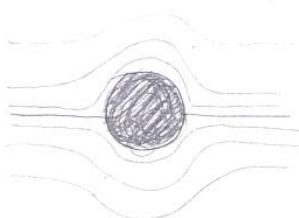


1 Obs:

Turbulência na exteira \Rightarrow baixa pressão \Rightarrow maior frenado na frente

\Rightarrow força de arraste (drag) ↑

variações complexas.



Situações ideal cf. força de arraste = 0.

Conhecido como paradoxo de D'Alembert, que sabia que existia força de arraste, mas não levava em conta viscosidade. Não sabia como capturar matematicamente.

Prandtl (conceito de reynolds) foi o primeiro a introduzir noções de Camada limite,

streamlining

DFP

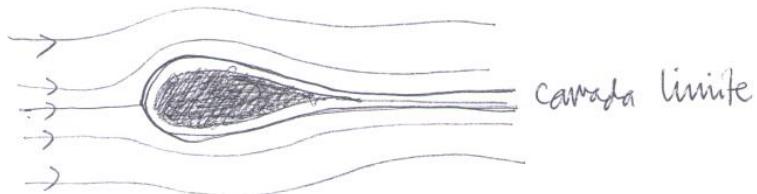
Obs: Quanto mais laminar o escoamento (com linhas de corrente bem definidas) menor resistência do fluido (ar ou água etc...).

Vide "Fórmula 1" e seus aerofólios etc ---

também \Rightarrow X
+ maior aderência cl pressão \downarrow

Isto significa, em outras palavras, fazer a camada limite ser a mais fina possível.

Ex: Escoamentos subsonicos

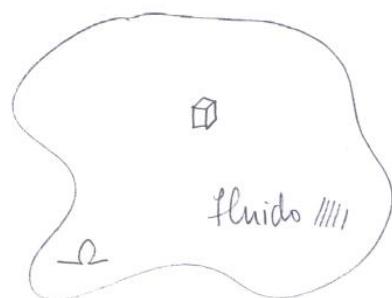


sustentamento (lift) = Calculado pela teoria do potencial (ideal)

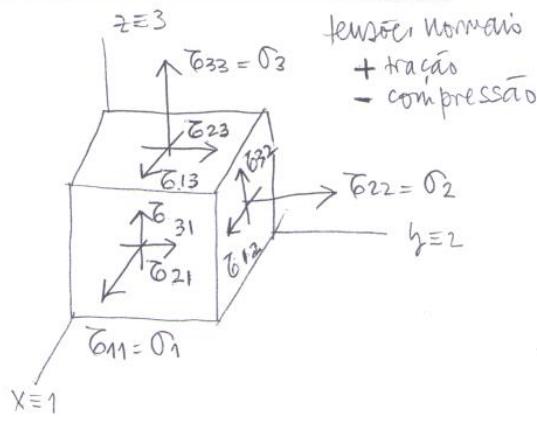
arrasto (drag) = calculado pela camada limite

ver lâmb.

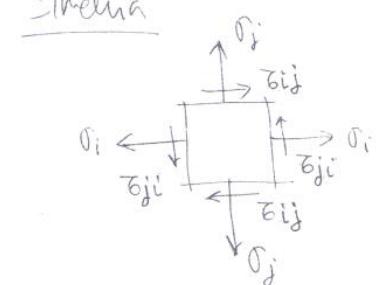
Forças Elementares no Corpo de um Fluido



$$\text{tensão} = \frac{\text{força}}{\text{área}}$$



Simetria



$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

= Tensor de Tensões =

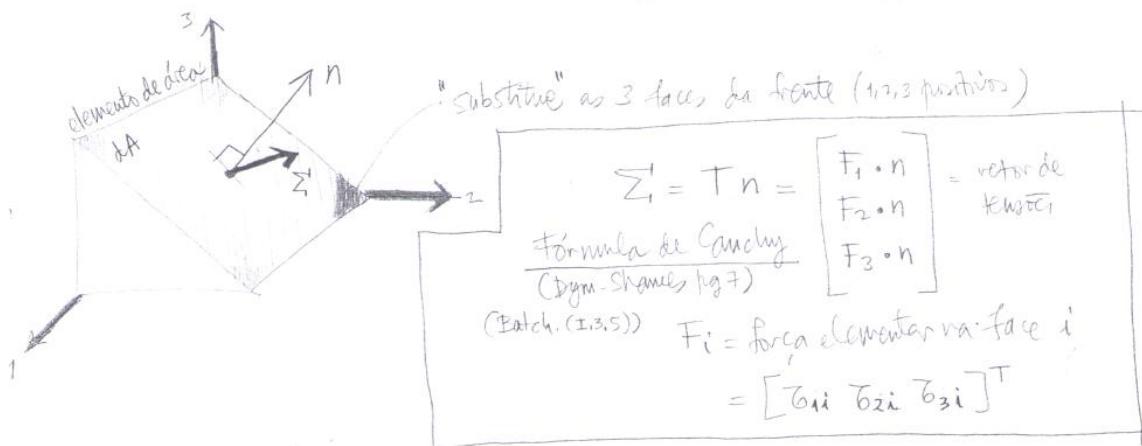
$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} & \bar{\sigma}_{32} & \bar{\sigma}_{33} \end{bmatrix} = \text{matriz simétrica.}$$

Eq. Dinâmico

balanço de momento angular. (veratrás)
implica em $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji}$ (simetria)

$$M^{-1} T M = D = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{tensões principais}$$

direções
principais (quando existem); $\frac{\tilde{\sigma}_{ii}}{T}$
(eixos principais)



Σ é uma força elementar, i.e por unidade de área.

$$[\Sigma] = \frac{[\text{Força}]}{[A]}, \quad \Sigma dA = [\text{Força}]$$



ESTUDAMOS as tensões em um fluido ESTÁTICO (Ingredientes Alg Linear)

DF 10

Consideremos um corpo esférico de fluido, negativo o suficiente, de maneira que seja uniforme:

$$\boxed{T(x, y, z) = \text{constante}, \quad (x, y, z) \in \text{esfera} \quad (\text{no centro da esfera})}$$

↑ tensor de tensões

Adotemos os eixos principais de forma que

$$M^{-1} T M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} - \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{22} - \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_{33} - \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} \end{bmatrix}$$

Isotropia = todo, os eixos
ortogonais de referência
não são eixos principais.
para o tensor

T_I = parte isotrópica

(simetria esférica)

(transformação similaridade)
varia a altera.

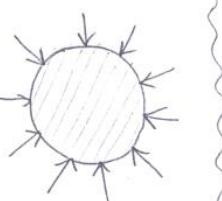
T_D = desvio da isotropia

(deformação = existe)

(relativamente de Caudis)

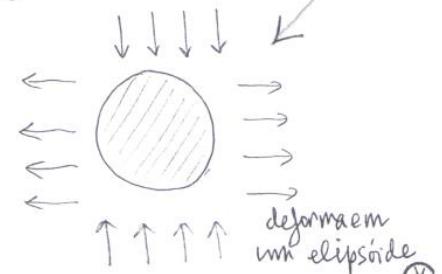
Batch 13

Intensidade
será esta
em um plano
elementar tornado:
 $\left(\frac{1}{3} \operatorname{traco} T\right)$



deformar como
elemento esférico

(Em duas direções principais)



$$\operatorname{traco} T_D = 0 \Rightarrow \text{tensão
comprimida e tração}$$

Este é estado não é compatível

com a configuração elástica. X
Nas forças para contrabalan-
çar a ação de T_D . ⊕ ↘ ↗



$$\Sigma = \left[\left(\tilde{\sigma}_{11} - \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} \right) n_1, \left(\tilde{\sigma}_{22} - \frac{1}{3} \sum \tilde{\sigma}_{ii} \right) n_2, \dots \right]^T$$

Conclusão: em um fluido em repouso: $\tilde{\sigma}_{ii} = \frac{1}{3} \sum_j \tilde{\sigma}_{jj}$, $i=1,2,3$. ou seja o tensor de tensões é isotrópico e só temos tensões normais. Tensões cisalhantes estão associadas a fluidos em movimento.

Obs: Fluidos em repouso estão em um estado de COMPRESSÃO. logo podemos escrever o tensor de tensões na forma

$$\tilde{\sigma}_{ij} = -p \delta_{ij},$$

delta de Kronecker,

com $p = -\frac{1}{3} \sum_i \tilde{\sigma}_{ii} > 0$

indicando a pressão

- (Fluidos) estática

compressão < 0 (pressão é uma grandezza)

Obs: A força elementar*, em um fluido em repouso, é $-\phi \vec{n}$.
(* de contato, por unidade de área)

○ Telesões para um fluido em Movimento :

- agora temos em geral tensores cisalhantes.
- não há razão para T ser isotrópico, nem uniforme. De acordo com a definição de pressão, no entanto, $\left[\frac{1}{3} \sum \delta_{ii} \right]$ é um invariante do tensor de tensões. (não depende dos eixos, da referência) (p/ ponto fixo, tempo fixo).

Seendo assim é interessante definirmos a

$$\boxed{\text{pressão mecânica} = p(x, y, z, t) = -\frac{1}{3} \sum \delta_{ii}}$$

ver também
Chorin pag 5
média das tensões principais

- Obs: A conexão entre pressão mecânica e pressão (termodinâmica) não é simples. Devemos observar que a pressão (termodinâmica), com a respectiva equação de estado^(**), se refere a condições de equilíbrio, enquanto que um fluido em movimento não está em equilíbrio termodinâmico, exatamente.

Fazemos "vista grossa", já que ainda não estudamos questões termodinâmicas e consideramos $p(x, y, z, t)$ uma grandeza com "sabor de pressão".

(**) :
$$\boxed{F(p, \rho, T) = 0}$$
, p =pressão, ρ =densidade, T =temperatura.

É interessante escrever (de novo) o tensor de tensões, de composto em uma parte isotrópica e outra não-isotrópica:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = -p \delta_{ij} + d_{ij}$$

Diccionário
(desvio = desvio)

parte deviatórica

→ existência devido
ao movimento.

Obs: $\operatorname{tr} d_{ij} = 0$ pois $\operatorname{tr} \bar{\epsilon}_{ij} = -3p = -\sum \bar{\epsilon}_{ii}$



(c.f. Chorin Marsden pg 32-33)

Modelo linear para a parte deviatórica d_{ij} :

(ver definição de tensão cisalhante e viscosidade DF5)

Este modelo está associado ao transporte de "quantidade de movimento" (vide Batch pg 142)

(lembre da $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ visto anterior)

Modelo*
linear

$$d_{ij} = A_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad k,l = 1,2,3$$

velocidades
 $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$
 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

Tensão x deformação

Elasticidade

$$\bar{\epsilon}_{ij} = E_{ijke} \epsilon_{ke}$$

$$\epsilon_{ke} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_e} + \frac{\partial u_e}{\partial x_k} \right)$$

Lei de Hooke

Soma de índices repetidos

$$\sum_k \sum_e A_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_e}$$

ver também
Chorin & Marsden
pag 33

* para pequenas deformações $\Leftrightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_e}$ pequeno.

Após várias hipóteses (modelo frisico) chega-se à
(relação constitutiva: tensão (deformação))

$$d_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\nabla \cdot u) \right)$$

(B144)

Obs: vemos que $\nabla \cdot u = 0 \Leftrightarrow$ escoamento incompressível
 \Rightarrow deformações \approx elasticidade clássica.

$$\begin{aligned} \text{Obs: } \boxed{\operatorname{tr} d_{ij}} &= -\mu \left(\sum_{i=1}^3 \left(2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 (\nabla \cdot u) \right) = \\ &= -2\mu (\nabla \cdot u - \nabla \cdot u) = \boxed{0} \quad \text{OK} \checkmark \end{aligned}$$

Conclusão: d_{ij} não contribui para a tensão normal média

$$\underline{\text{média}} = \frac{1}{3} \sum \sigma_{ii}$$

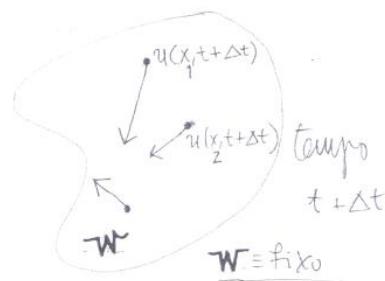
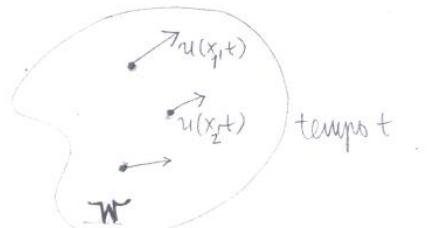
EQUAÇÕES de MOVIMENTO



2 maneiras de se definir o movimento de um corpo de fluido Ω .

(1) EULERIANA

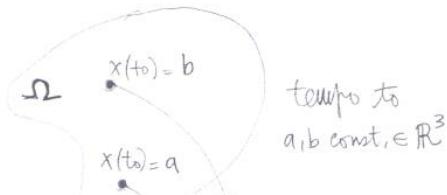
grandezas do escoamento são especificadas como funções da POSIÇÃO e do TEMPO.



na formulação Euleriana
abaltarmos com "POSTOS"
e "OBSERVAÇÃO" situados
nos PONTOS (x_j)

(2) LAGRANGIANA

grandezas do escoamento são especificadas como funções do TEMPO e da partícula de fluido identificada por um parâmetro ("etiqueta").



Obs: Ω e $\partial\Omega$
podem depender
do tempo t .

poderemos definir

uma aplicação
de escoamento
no fluxo

$$a \mapsto x(t; a)$$

$$\varphi_t(\partial\Omega(t_0)) = \Omega(t)$$

fixarmos o parâmetro $a \Rightarrow$ vemos

a órbita descrita pela partícula,

que no instante inicial $t=t_0$,

residia em $x=a$ Viajamos com a partícula!

fixando $t=3$ vemos onde estão as partículas que estavam em a, b, c etc... quando $t=t_0$

- Considere uma partícula de fluido $x(t; a) =$

$$\begin{bmatrix} x_1(t; a) \\ x_2(t; a) \\ x_3(t; a) \end{bmatrix}$$

Sua aceleração é dada por

$$\boxed{\frac{d^2 x(t; a)}{dt^2} = \frac{d}{dt} u(x(t; a), t)}, \text{ onde } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\frac{d^2 x_i(t; a)}{dt^2} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

Isto pode ser escrito na forma

$$\frac{d^2 x_i(t; a)}{dt^2} = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

ou na forma

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = (u \cdot \nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D u}{Dt} (x(t), t)}$$

~~X~~ derivada
material
(ao fluxo, no transporte)

Com $\boxed{\frac{D}{Dt} = (u \cdot \nabla) + \frac{\partial}{\partial t}}$ definido a derivada

material* ou derivada de transporte, onde o transporte é feito pela própria grandeza u (convecção)

* (pois acompanha a partícula)

derivada convectiva

→ no caso ativo $\frac{du}{dt}$

de transporte

→ mas, não no caso paritivo $\frac{DC}{Dt} = C_t + (u \cdot \nabla) C$

- Obs1: Note que usamos a relação

$$\boxed{\frac{dx(t;a)}{dt} = u(x(t;a), t)},$$

Esta relação nos dá uma conexão entre a formulação lagrangiana (esquerda) e a formulação euleriana (direita)
 (interpretação à la' edo) (graus também variam o "a")
 (interpretação à la' edp).

- Obs2:

$$\boxed{\frac{Du}{Dt}(x(t;a), t) = (u \cdot \nabla)u + \frac{\partial u}{\partial t}}$$

Isto acontece com eq. hiperbólicas e o método das características.

- Obs3: Considere uma grandeza qualquer (escalar ou vetorial) amostrada ao escalameto: $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{Df}{Dt} = (u \cdot \nabla)f + \frac{\partial f}{\partial t}} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ é transportado pelo } u. \\ \text{Ao longo da órbita } \vec{x}(t;a) \\ f \text{ não varia! (se } \frac{Df}{Dt} = 0) \end{array}$$

$$\text{Ex: 1D: } \frac{Df}{Dt} = u \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = f_t + u f_x$$

$$\text{Se } u = \text{const} = c \text{ então } \boxed{\frac{Df}{Dt} = 0} \Rightarrow \text{eq da onda.}$$

(advecção = transporte 'pamiro')

Ex: vento <

Se $f = u$

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \text{eq. de Burgers.}$$

Convecção
transporte ativo, feito
pela solução da edp

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t; a), t)$$

Obs 4: A partir da obs 1 podemos definir as (Batch 72) X
LINHAS de CORRENTE no tempo t . Primeiro notigue

$$\frac{dx_1}{u_1(x, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x, t)} = dt \quad (\text{mas congelado no tempo, digamos } t = t_0)$$

ou

$$\frac{dx}{u(\vec{x}(s), t)} = \frac{dy}{v(\vec{x}(s), t)} = \frac{dz}{w(\vec{x}(s), t)} = dt \quad (\text{que são linhas instantaneamente tangentes ao campo de velocidades}) \quad X$$

$(dx, dy, dz) // (u, v, w)$

Quando o escoamento é estacionário (i.e., u, v e w não dependem de t) as linhas de corrente não mudam de forma e elas representam as órbitas das

partículas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u(x) \\ \frac{dy}{dt} = v(x) \\ \frac{dz}{dt} = w(x) \end{array} \right.$$

$$x(t_0) = a_1$$

$$y(t_0) = a_2$$

$$z(t_0) = a_3$$

No caso geral as tangentes às linhas de corrente são instantaneamente paralelas ao campo de velocidade $u(x,t)$. Mas as linhas de corrente não representam as órbitas das partículas. O sistema lagrangiano de edo's é não autônomo: considere a seguinte forma alternativa de definir a eq. das linhas de corrente:

(Chorin pg 15) Seja $x(s)$ a linha de corrente parametrizada por s . Seja o tempo t fixo ($t=T$). Entas pela definição

$$\boxed{\frac{dx(s)}{ds} = u(x(s), T)} \Rightarrow \text{linhas de corrente}$$

em contraste com

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = u(x(t), t)} \Rightarrow \text{trajetórias (órbitas) das partículas}$$

pular para Ans. de Manz.

Obs: Seja $\boxed{F(x,t) = \text{const.}}$ a representação geométrica de uma Superfície Material:



curva composta SEMPRE pelas mesmas partículas.
Pode haver deslocamento relativo ao longo da curva. Ex: compressão.

DF 20

Se $F(x(t), t) = \text{const}$ for independente do tempo,

então podemos escrever $F(x(t)) = \text{const}$ e

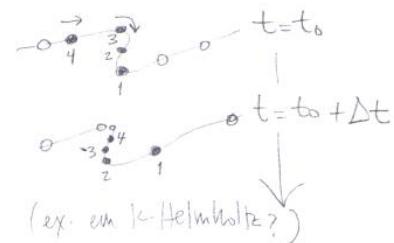
isso significa que a curva não muda

de geometria ao longo do tempo.

mal escrito X

A visão Euleriana não muda (ponto)

A visão Lagrangiana pode mudar (ponto mundo mundo)



Em qualquer caso temos que para uma superfície material $F(x(t), t) = \text{const}$ (a grandeza F , associada à partícula $x(t)$ não muda no tempo (ex: concentração transportada))

$$\boxed{\frac{DF}{Dt} = 0}$$

No caso a curva, em que $F(x(t)) = 0$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \Rightarrow u \cdot \nabla F = 0$$

→ pode mudar no tempo

D) CONSERVAÇÃO de MASSA

$m(W, t) \equiv$ Massa na região W
de fluido no tempo t

$$m(W, t) = \int_W p(x, t) dV$$

conteúdo
unidades

$$\boxed{\int_n dA \frac{dv}{dt}}$$

$\vec{p} \vec{n} \rightarrow$ fluxo de massa

Princípio de Conservação de Massa

$$\rightarrow \boxtimes_1 \boxed{\frac{d}{dt} \int_W p(x, t) dV = - \int_{\partial W} p u \cdot n dA}$$

Obs:

$\frac{dm}{dt} > 0$ grande fluxo em
 ∂W na direção $(-\vec{n})$.

(B74) (CM 2)

DF 2)

Como estamos com uma formulação Euleriana ($x \in \mathbb{R}^3$, e não $x(t)$).

$$\int_{\text{V}} \rho_t(x,t) dV = - \int_{\text{V}} \nabla \cdot (\rho u) dV$$

ou ainda

$$\int_{\text{V}} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho u)) dV = 0 \Rightarrow$$

Ex

Conservação de Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

\square_2

(Ex. de continuidade)

\square_1 = Lei de Conservação e sua respectiva versão na forma
de uma edp \square_2 .

Quando ρ e/ou u não forem suaves devemos usar \square_1

$$\nabla \cdot (\rho u) = \rho \nabla \cdot u + (u \cdot \nabla) \rho$$

logo temos (outra forma)

$$\square_2' \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot u = 0$$

Obs: no Bachelor fd-de-página 74:

$\left. \begin{array}{l} dV, n dA, dx \Rightarrow \text{elementos geométricos infinitesimais de volume,} \\ \text{superfície e linha} \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} d\Omega, n dS, dl \Rightarrow \text{elementos materiais infinitesimais de volume, superfície} \\ \text{e linha} \end{array} \right\}$

$d\Omega$ (neste curso)

Euleriano

Superfície e linha

Lagrangeano

Obs: Consideremos agora um volume material Ω .

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\partial\Omega} u \cdot n dS \quad ||$$

$$= \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) d\Omega$$



$n dS$ = elemento de superfície material, que está em movimento.

→ não é fluxo através de uma superfície; $(u \cdot n dS)$ representa o deslocamento (por unidade de tempo) da superfície infinitesimal de partículas (material).

Tomemos agora o limite

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) d\Omega = \nabla \cdot u$$

taxa (local) de expansão (dilatação)

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{F(\Omega) - F(0)}{\Omega} = f(\Omega) = \text{integrando.}$$

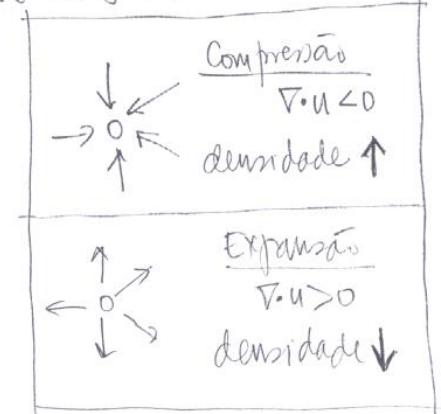
Obs: Consequência da obs acima

Conservação de massa pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = - \nabla \cdot u$$

↓ taxa de expansão

↓ taxa de variação de densidade



Def:

DF 23

Um fluido é dito incompressível (efetivamente \Rightarrow desprezado questões relativas à transferência de calor) se a densidade em cada elemento material for constante.

ou seja

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot u = 0}$$

Campo solenoidal de velocidades

(menos físico, mas mais usado).

Lembre-se...
(taxa de expansão)

Chapin 5

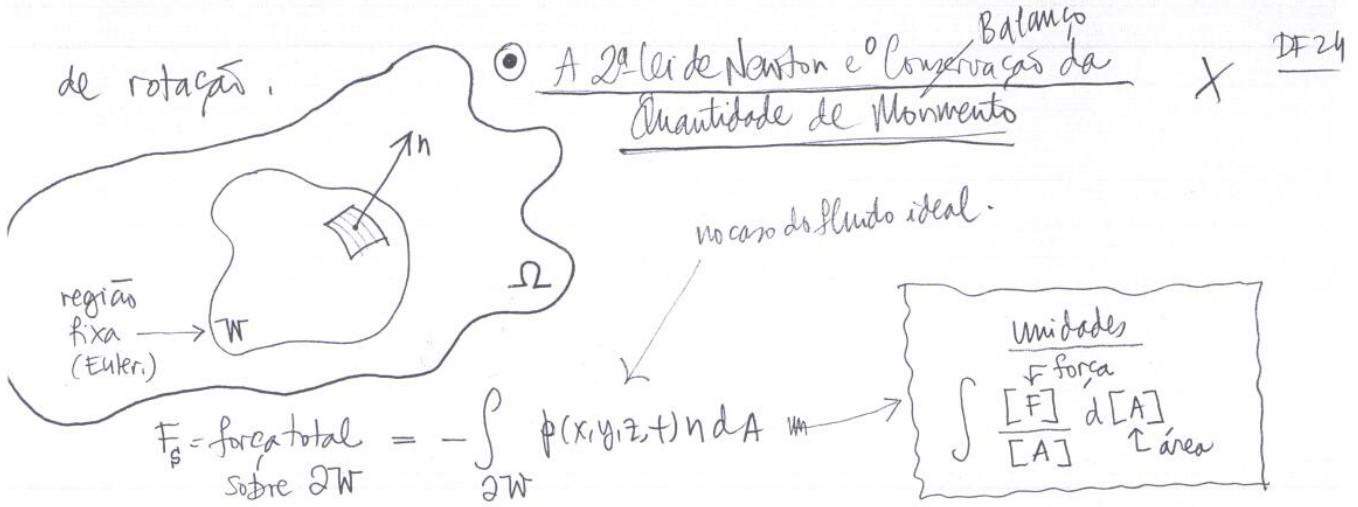
Definição de fluido ideal = (sem considerações termodinâmicas) =
para qualquer escoamento desse fluido existe uma função $p(x, y, z, t)$, chamada de pressão, tal que se S é um superfície do corpo fluido, com normal unitária n , a força ^{infinitesimal} proveniente da distribuição de tensões, ao longo de S é

$$\boxed{\sum = -p(x, y, z, t)n}$$

* por unidade de área, no ponto (x, y, z) e instante t

↓ pressão "mecânica".

Obs: Fluidos ideais são modelos que cobrem uma fração dos problemas reais. Por exemplo, a ausência de tensões resistentes, implica em que não se tem mecanismos para gerar ou parar efeitos



Seja e um vetor unitário, em uma direção fixa qualquer:

$$e \cdot F_s = - \int_{\partial W} p e \cdot n dA = - \int_W (\nabla \cdot p e) dV = e \cdot \left(- \int_W \nabla p dV \right)$$

Logo

$$F_s = - \int_W \nabla p dV$$

unidades

$\int \frac{1}{[L]} \frac{[F]}{[A]} d[V]$ volume

\uparrow distância

Seja $f(x, y, z, t)$ uma força externa agindo sobre a região W , ou seja, uma força de massa (i.e. por unidade de massa)

$$\mathbb{B} = \int_W f(x, y, z, t) b(x, y, z, t) dV$$

unidades

$\int \frac{[M]}{[V]} \frac{[F]}{[M]} d[V]$

Ex: força devido à ação da gravidade: $b = (0, 0, g) T$.

Equacionemos as forças por unidade de volume

$$\frac{[F]}{[V]} = - \nabla p + \rho b$$

Pela 2^a lei de Newton:
(por unidade de volume)

$$\frac{[\text{m}]; [\text{L}]/[\text{T}]^2}{[\text{V}]; \text{densid.}} = \sum_i \left(\frac{[\text{F}]}{[\text{V}]} \right)_i$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho b$$

Eq. de balanço de
quantidade de movimento
(massa * velocidade)

$$\frac{DU(x,t)}{Dt}$$

→ Esta será uma das equações do sistema de edp's conhecido
como eqs. de Euler.

Fazemos agora o caminho inverso do que fizemos para
a eq. de conservação de massa, e derivamos a versão
Integral do balanço de quantidade de movimento:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho b$$

Conservação de massa nos deu

$$\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \Leftrightarrow \boxed{p_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0}$$

Logo podemos re-escrever a eq. acima na forma
quantidade de movimento por unidade de volume

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho b$$

$\cancel{p_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})}$

Usemos de novo o vetor unitário e

$$e \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = - \underbrace{\nabla \cdot (\rho u)}_{\text{u} \cdot \nabla} u \cdot e - \rho (u \cdot \nabla) u \cdot e - \nabla p \cdot e + \rho b \cdot e \\ = - \nabla \cdot (\rho u (u \cdot e)) - \nabla \cdot (\rho e) + \rho b \cdot e$$

Integremos sobre o volume fixo \mathcal{V}

$$e \cdot \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot [\rho u (e \cdot u) + \rho e] dV + e \cdot \int_{\mathcal{V}} \rho b dV$$

\mathcal{V} escalar

Pelo teorema da divergência

$$e \cdot \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV = - \int_{\partial \mathcal{V}} [(e \cdot \rho u) u \cdot n + e \cdot \rho n] dA + e \cdot \int_{\mathcal{V}} \rho b dV$$

Desfazendo o produto interno concluimos que

<p>$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho u dV$</p> <p>é dependente de t</p> <p>integração</p> <p>geral</p>	$= - \int_{\partial \mathcal{V}} [\rho n + (\rho u) u \cdot n] dA + \int_{\mathcal{V}} \rho b dV$
<p>$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u dV$</p> <p>taxa de variação (nó tempo) da quant. de movimento total (mas mais por unid. volume)</p>	<p>$\int_{\partial \mathcal{V}} [\rho n + (\rho u^3) u \cdot n] dA$</p> <p>qtd. mov. rel. normal</p> <p>$\int_{\mathcal{V}} \rho b dV$</p> <p>fluxo de quantidade de movimento, por unidade de área, através da superfície $\partial \mathcal{V}$</p> <p>força de manha</p>

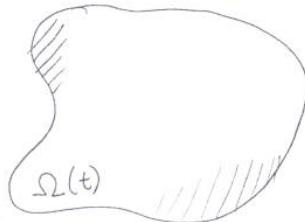
DF:27

Formulemos novamente as 2 equações de balanço, mas agora permitindo um domínio material.

Conservação de Massa

formulação integral

$$\frac{d}{dt} m(\Omega(t)) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x,t) d\Omega = 0$$



Fazemos a mudança de coordenadas

$$\frac{d}{dt} m(\Omega, t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} \rho(\varphi_t(x_0), t) J d\Omega_0 ,$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} m(\Omega, t) = \int_{\Omega(0)} \left(\frac{d}{dt} \rho J + \rho \frac{dJ}{dt} \right) d\Omega_0$$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & 1 \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & 0 \end{vmatrix}$$

$\Omega_0 \xrightarrow{\varphi_t} \Omega(t)$

$$d\Omega = J d\Omega_0$$

$$\text{vol} = \int d\Omega = \int J d\Omega_0$$

Lema: $\frac{dJ}{dt} = (\nabla \cdot u) J$

Obs: note que $\nabla \cdot u = 0$, de novo, não remete à noção de incompressibilidade

$$\Rightarrow J(t) = \text{constante} \Rightarrow \int d\Omega = \int_{\Omega(t)} J d\Omega_0 = J \int_{\Omega(0)} d\Omega_0$$

$J(0) = 1$

Noção de expansão ou contração

○ Demonstração: Chom pág. 8. (estudar!)

Usa a multi-linearidade de J

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} d/dt & x_{x_0} & y_{x_0} & z_{x_0} \\ d/dt & x_{y_0} & y_{y_0} & z_{y_0} \\ d/dt & x_{z_0} & y_{z_0} & z_{z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x_0} & d/dt y_{x_0} & z_{x_0} \\ x_{y_0} & d/dt y_{y_0} & z_{y_0} \\ x_{z_0} & d/dt y_{z_0} & z_{z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x_0} & y_{x_0} & d/dt z_{x_0} \\ x_{y_0} & y_{y_0} & d/dt z_{y_0} \\ x_{z_0} & y_{z_0} & d/dt z_{z_0} \end{vmatrix}$$

para se concluir que (usando $d/dt x_{x_0} = \partial u / \partial x_0 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \underbrace{\text{III} + \text{IV}}_{\text{estes 2}}$)

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} J + \frac{\partial v}{\partial y} J + \frac{\partial w}{\partial z} J$$

últimos termos
podem ser "eliminados"
por combinação linear



Voltando à conservação de massa temos

$$\int_{\Omega(t_0)} \left(\frac{d}{dt} \rho J + \rho \frac{dJ}{dt} \right) d\Omega_0 = \int_{\Omega(t_0)} \left(\frac{dp}{dt} + \rho (\nabla \cdot u) \right) J d\Omega_0 =$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left(\rho_t + u \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot u) \right) d\Omega = 0 \quad \boxed{\text{para } g \neq -2(t)}. \quad \underbrace{\phantom{\int_{\Omega(t)} \left(\rho_t + u \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot u) \right) d\Omega = 0}}$$

$$\boxed{\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0} \quad \text{formulação via Eqs. Dif.}$$

$$\text{ou } \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot u = 0}$$

Conservação de Quantidade de Movimento

$P = mv \Rightarrow$ quantidade de movimento

$$P = \int_{\Omega(t)} \rho u d\Omega$$

$$\frac{dP}{dt} = F \quad (2^{\text{a}} \text{ Lei de Newton} \Rightarrow ma = F)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho u d\Omega = F$$

mais precisa, mais correto

$$\frac{d}{dt} \rho(\Omega(t), t)$$

$$\int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{D\rho}{Dt} u + \rho \frac{Du}{Dt} \right) J + (\rho u) \frac{dJ}{dt} \right] d\Omega_0 = F$$

força de mana.

$$\int_{\Omega(t)} \left[\frac{D\rho u}{Dt} + \rho \frac{Du}{Dt} + \rho u (\nabla \cdot u) \right] J d\Omega_0 = F = \int_{\partial\Omega(t)} f d\Omega$$

↑
(Conserv. de Mana * u)

$\cancel{\text{Conserv. de Mana}}$
 $\cancel{\text{f = f(S)}}$

$$\rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) = \cancel{ff}$$

sumário de fluxo

ou ainda na forma de lei de conservação ($w_t + \operatorname{div}(F(w)) = 0$)

$$(\rho u_i)_t + \nabla \cdot (\rho u_i u) = \cancel{\rho f_i} \quad i=1,2,3$$

$$\frac{d}{dt} \int_w \rho u dV + \int_w F(w) \cdot n dA = 0$$

$0 \Leftrightarrow$ Conserva

não varia no tempo.

(mantendo termo de Conservação de Mana)

Obs: Considerando a mesma força de mana adotada anteriormente

termos

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \cancel{b}$$

$\cancel{f \rightarrow b}$

DF30

Pensando, acabamos de provar o Teorema de Transporte:

Seja $\Omega(t)$ uma região material, ∇ ^{Temos que para /} qualquer função $f(x,t)$ (onde a derivada material está definida) :

Teorema do transporte

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho f d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{Df}{Dt} d\Omega$$

↓ o ρ é transparente à esta derivada
↓ Sem o ρ , muda.

Analogamente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f d\Omega = \int_{\Omega(t)} (f_t + \nabla \cdot (uf)) d\Omega$$

{ Note que não basta
só ser $\rho=1$, o que
particulariza o
escoamento. O teorema
vale para qualquer
escoamento!

Obs: Vimos diversas formas de caracterizar
Incompressibilidade:

(1) $\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$ (3) $J = 1, \forall t.$

(2) $(\nabla \cdot u) = 0$

de (1) concluímos que se o fluido for incompressível e homogêneo, então $\rho = \rho_0 = \text{constante}$. Fluidos não homogêneos, com respeito à densidade, ocorrem por exemplo em oceanografia onde a salinidade e variações térmicas

nos levam a modelos (escoamentos) estatificados, ou seja em camadas sucessivas.

Balanco

Vejamos agora conservações de quantidade de movimento no caso de fluidos viscosos. Note que a Lei de Conservações de Massa não se altera.

Voltando ao cálculo feito na página DF24 e Námina DF29. Escrevemos então a 2ª Lei de Newton

col. ant. 16.

← anterior pág. 22

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} p u \, d\Omega = \int_{\Omega(t)} p b \, d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} T \cdot n \, dS, \quad X$$

onde T é o tensor de tensões. Pelo teorema da divergência temos para cada componente i do vetor

$$\left[\int_{\partial\Omega(t)} T \cdot n \, dS \right]_i = \int_{\partial\Omega(t)} \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \right) \, dS \xrightarrow{\text{teorema da divergência}} \int_{\Omega(t)} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \, d\Omega = X$$

$$\begin{aligned} 3-14) \quad &= \int_{\Omega(t)} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\nabla \cdot u) \right) \right] \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega(t)} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot u) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot u) \right) \right] \, d\Omega \end{aligned}$$

A eq de conservação de quantidade de movimento
é dada por

Balanço

feitas

$$\rho \frac{D u_i}{Dt} = -(\nabla p)_i + \rho \dot{\phi}_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{2}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\nabla \cdot u) \right\}$$

para fluidos incompressíveis, o termo proveniente das tensões superficiais se simplifica, e temos que

de Balanço

Eq. Conservação da
Quantidade de Mov.

$$\rho \frac{D u_i}{Dt} = -(\nabla p)_i + \rho \dot{\phi}_i + \mu \Delta u_i$$

esta é uma equação de convecção-difusão

Voltando à situação inviscida: Foram deduzidas 2 leis de conservação:

$$\left. \begin{array}{l} \text{4 equações} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{D p}{Dt} + (\nabla \cdot u) = 0 \quad (\text{Cons. de Massa}) \\ \rho \frac{D u}{Dt} = -\nabla p + \rho \dot{\phi} \quad (\text{Cons. de Qte Movimento}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Mas temos 5 incógnitas: $u(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ e $\phi(x, y, z, t)$.

- Precisamos de uma outra equação.
- Candidata: conservação de energia.
- Se fizermos considerações gerais de termodinâmica o problema fica bastante complicado e necessita um maior aprofundamento nestas questões. Segundo o Chorin & Marsden tratemos inicialmente de alguns casos mais simples.

Vamos escrever a energia total como

$$E_T = E_C + E_I$$

$\left\{ \begin{array}{l} E_C = \text{energia cinética} \\ E_I = \text{energia interna} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_C = \frac{1}{2} \int_W \rho \|u\|^2 dV \\ E_I = \int_W p_e dV, \quad \text{onde por exemplo } e = e(\rho, T) \quad (\text{C-Fried}) \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{fazemos ligação q/a de estado também} \\ \qquad \qquad \qquad \phi = \phi(\rho, T). \end{array} \right.$$

X (levar que ignoramos
força de water =)
eu. potencial

DF34



Alguns princípios básicos de Termodinâmica

Aprendendo sozinho
Variáveis

p = pressão
 ρ = densidade

$$e = w - \frac{p}{\rho} v$$

pular

T = temperatura

s = entropia específica

w = entalpia (por unida de massa)

e = energia interna (por unida de massa)

$$w = e + \frac{p}{\rho} v$$

, onde $\frac{1}{\rho} = v$ = volume específico
(por unida de massa)

Courant & Friedrichs \Rightarrow matemática
mais vale, completo

Batchelor \Rightarrow fisicamente
mais completo

1^a lei da Termodinâmica : (Chorin & Marsden deixam solto...)

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

$$de = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

conceito seguir

(Pg 4)
(Batch 22)

Courant & Friedrichs \Rightarrow A energia interna ganha pelo fluido ("de")

durante a mudança de um estado para outro (não confundir com mudança de fase) e o calor contribuído para o meio mais o trabalho exercido sobre o meio pela ação compressiva da pressão. Matematicamente expressamos este modelo

pela 1^a lei da Termo. (Batch pg 22 (I.5.3))

(em equilíbrio) não
de (balanço termodinâmico dentro
dos elementos)

$$de = dQ - \phi dv$$

↑ trabalho elementar das
forças compressivas

calor contribuído (energia térmica) ↳

(I.5.3)
(Batch pg 22).
 $dQ = TdS$
(I.5.7)

(Batchelor Pg 24) : 2^a lei da Termodinâmica faz uso de uma
propriedade de um fluido em equilíbrio (a entropia), tal que

em uma transição reversível de um estado de equilíbrio para outro vizinho, o aumento de entropia é proporcional ao calor dado ao fluido. Ainda, a constante de proporcionalidade é uma função de estado, depende somente da temperatura, e pode ser escolhida como o seu valor real:

$$dQ = Tds$$

$$dS = \frac{1}{T} dQ, \quad dQ = \text{valor infinitesimal de calor (reversível) transferido por unidade de massa.}$$

Logo obtémos a forma apresentada no Chorin & Marsden:

$$de = Tds - p d\left(\frac{1}{p}\right) = Tds + \frac{p}{p^2} dp.$$

da página DF34.

(b2)

Uma transição reversível adiabática (não há troca de calor para fora do sistema) se realiza à entropia constante e é chamada de isoentrópico. Uma consequência da 2ª Lei da Termodinâmica é que, em um processo adiabático irreversível, a entropia não pode diminuir (Fundamentos da Termodinâmica Clássica, Van Wylen AJ & Sonntag RE, Ed. Edgar Blücher Ltda, 1976, sec. 7.8, pag. 160 — versão em inglês, 1973, John Wiley).

(Courant-Fr.
pg 4)

Obs: Note (1ª Lei da Termodinâmica) que a partir do diferencial total de energia interna

$de = Tds + \frac{p}{p^2} dp$, podemos inferir a (pomível) existência de equações de estado $p = f(p, s)$ e $T = g(p, s)$

onde

$$T = \frac{\partial e}{\partial s}$$

$$p = p^2 \frac{\partial e}{\partial p}$$

, com $e = e(p, s)$.

Definir a função $w = e + \frac{pv}{\rho}$, chamada de ENTALPIA.

Pela 1ª lei
da Termodinâmica

$$de = Tds - pdv$$

mas

$$dw = de + d(pv)$$

ganhos de energia interna = calor contribuído + trabalho da pressão
($dQ = Tds$)

Em termos da entalpia a 1ª lei se escreve

$$dw - d(pv) = Tds - pdv$$

$$dw = Tds + d(pv) - pdv = Tds + vdp,$$

ou seja

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

isentrópico $\Rightarrow ds = 0$

(transição (de estados) de equilíbrio) reversível adiabática \Rightarrow a entropia constante)

- Temos que para escoamentos isoentropicos.

$$\boxed{dw = \frac{1}{\rho} dp} \quad \text{ja' que } dS \equiv 0.$$

- Chorin & Marsden já partem da definição de que um escoamento é isoentrópico se existir uma função w (chamada de entalpia) tal que

$$\boxed{\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p}, \quad \begin{array}{l} \text{(isto será usado} \\ \text{na eq. de Cons. de Qtdade} \\ \text{Movi.)} \end{array}$$

- Da relação acima podemos escrever que

$$\frac{dw}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp} \quad \text{ou ainda que}$$

$$\boxed{w(p) = \int^p \frac{1}{\xi} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi}$$

Analogamente podemos escrever, para a energia interna,

$$\boxed{e(p) = \int^p \frac{\phi(\xi)}{\xi^2} d\xi}$$

Conseqüentemente temos, para gases isoentropicos* com constante γ ,

DF3P

(i.e. politrópico) X

$$w(p) = \frac{\gamma A p^{\gamma-1}}{\gamma-1}, \text{ para a entalpia e}$$

$$e(p) = \frac{A p^{\gamma-1}}{\gamma-1}, \text{ para a energia interna.}$$

FECHANDO os MODELOS

X

A equação de Euler para escoamentos isoentropicos é

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + b \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (pu) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{em } \mathcal{W}$$

X

ou $u \cdot n = 0$ em $\partial \mathcal{W}$ (contorno fixo)

$u \cdot n = U \cdot n$ em $\partial \mathcal{W}$ (U , velocidade prescrita)

X

Com $p(p) = A p^\gamma$, a equação de estado que retrata critérios de conservação de energia.

Temos basicamente 4 equações a 4 incógnitas (u e p). No Chorin & Marsden o termo $\frac{1}{\rho} \nabla p$ é substituído por ∇w . Basta substituir a relação para a entalpia ($w=w(p)$) dada acima.

* Isto é um pouco abuso de linguagem, mas aceitável. Por extenso, devemos dizer gases ideais em escoamentos isoentropicos (regime no qual as mutações de estado se dão na forma isoentropica).

• (C.F pg6) GASES IDEIAIS

- As leis de Boyle* e de Gay-Lussac** (Física, Resnick-Halliday, vol I-2, Cap.23, LTC, 1976) nos leva à equação de estado para gases ideais:

definição

$$pV = RT$$

onde R é a constante do gás,

que depende da constante universal dos gases (c.f. Courant-Friedrichs pg6). Alguns valores de R (e o valor da constante universal dos gases) podem ser encontrados em *Atmosphere-Ocean Dynamics*, A. Gill, pg 40, Academic Press, 1982.

- Para um gás ideal a energia interna é função apenas da temperatura (c.f. seção 4, Courant-Friedrichs). Em particular quando $e \propto T$, o gás é dito politrópico e escrevemos

$$e = C_v T$$

C_v = calor específico, a volume constante.

- Em Courant-Friedrichs prova-se que as relações acima levam a^m

iii) EQUAÇÃO de ESTADO

$$p = f(p, S) = A p^r$$

$A = \text{constante}$
 $r = \text{const. adiabática}$ ($\text{geralmente } r \in [1,5/3] \quad \gamma_{ar} \approx 1,4$)

gás em equilíbrio térmico: para valores baixos da densidade

Boyle * dada massa, T constantes $\Rightarrow p \propto \frac{1}{\text{volume}}$

Gay-Lussac ** dada massa, p constantes $\Rightarrow \text{volume} \propto T$

Vejamos agora a equação de Euler para escoamento incompressível

Já vimos anteriormente que incompressibilidade é matematicamente expressa na forma $\nabla \cdot u = 0$. Podemos então escrever as "equações de Euler incompressíveis" (não são as edp's que são incompressíveis (sic)):

$$\left. \begin{array}{l} \rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \rho b \\ \frac{Dp}{Dt} = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{array} \right\} \text{em } \mathcal{W}$$

$$u|_{\partial\mathcal{W}} = 0 \quad \text{em } \partial\mathcal{W} \quad (\text{no caso de fronteira fixa}).$$

Temos 5 equações a 5 incógnitas (u, p, ρ):

Chorin & Marsden (pg 13) mostram que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dEc}{dt} = 0 \iff \text{Conservação de Quantidade de Movimento.}$$

Note que se $p(x, 0) = p_0$, uma constante então a equação de Euler passa a ter 4 equações:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + b \\ \nabla \cdot u = 0 \end{array} \right\} \text{em } \mathcal{W}$$

Equações de Navier-Stokes

— Termos

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{D u_i}{D t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\nabla \cdot u) \right\} \\ i = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{\rho} \frac{D p}{D t} + (\nabla \cdot u) = 0 \end{array} \right.$$

~~ainda falta uma equação, mas vejamos o caso clássico abaixo.~~

— No caso de um escoamento homogêneo, incompressível,

~~termos~~

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{D u_i}{D t} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + b_i + \gamma \Delta u_i \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{em } \mathcal{W} \\ \text{em } \partial \mathcal{W} \end{array}}$$

onde $\rho = \rho_0$, $\tilde{p} = \frac{p(x_1, y, z, t)}{\rho_0}$ e a viscosidade

CINEMÁTICA é definida por $\boxed{\gamma = \frac{\mu}{\rho}}$

— Note que temos uma condição de contorno adicional: a condição de "non-slip" (no-slip). Esta condição diz que a velocidade tangencial, a um contorno imóvel,

ϵ nula, fisicamente isto é um efeito da viscosidade.

DFU)

O efeito de fricção não permite que as partículas, em contato com um contorno sólido, se movam. Matematicamente isto é um efeito de derivadas de ordem mais alta: Δu .

A incorporação da derivada tangencial nula permite a demonstração de teoremas provando que as equações são bem-postas: soluções únicas existem e dependem continuamente nos dados iniciais. Nem sempre se consegue demonstrar existência global; apenas para um intervalo finito de tempo. Uma boa fonte de referências no assunto é:

- R. Teman, *The Navier-Stokes Equations*, North-Holland, 1977
- R. Teman, *The Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, SIAM, 1983.
- O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon & Breach, 1969.
e para as equações de Euler
- C. Marchioro & M. Pulvirenti, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Flows*, Springer-Verlag, 1994.
- A. Majda, *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Dimensions*, Springer-Verlag, 1984.

- P-L. Lions, Mathematical Topics in fluid mechanics, Vol 1.
 Incompressible models, Oxford lecture Series in
 Mathematics and Its Applications, Oxford Science
 Publications, 1996.

TEOREMAS de BERNoulli (Leis de Bernoulli)

Teorema: Seja um escoamento estacionário isoentrópico. Então a grandeza $\frac{1}{2} \|u\|^2 + w$ é constante ao longo de linhas de corrente.

Teorema: Seja um escoamento estacion. homogêneo ($p = \text{constante} = p_0$) e incompressível. Então a grandeza $\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{p}{p_0}$ é constante ao longo de linhas de corrente.

Dem: $\frac{D u}{D t} = - \nabla w + b$ (e.g. teor. - isoentrópico)

escoamento estacionário $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

$$(u \cdot \nabla) u = - \nabla w$$

Vejamos agora algumas identidades vetoriais

* se for uma força conservativa, ie $b = \nabla \phi$, a incorporação deste termo é trivial. Basta aglutiná-lo com o w .

DF 43

$$\boxed{\frac{1}{2} \nabla \|u\|^2 = \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) = (u \cdot \nabla)u + u \times (\nabla \times u)}$$

(Identidade 15 - Chorin & Marsden Pag 165)

Logo $\nabla \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 + w \right) = \cancel{(u \cdot \nabla)u + u \times (\nabla \times u)} - \cancel{(u \cdot \nabla)u}$

ou ainda

$$\boxed{\nabla \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 + w \right) = u \times (\nabla \times u)}$$

~~X~~
estacionário, vamos
usá-las em nosso
benefício.

Integrando ao longo de uma linha de corrente, entre
dois pontos genéricos $x(s_1)$ e $x(s_2)$ temos que

$$\int_{x(s_1)}^{x(s_2)} \nabla \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 + w \right) \cdot \frac{dx}{ds} ds = \int_{x(s_1)}^{x(s_2)} [u \times (\nabla \times u)] \cdot \frac{dx}{ds} ds$$

ou

$$\left[\frac{1}{2} \|u\|^2 + w \right]_{x(s_1)}^{x(s_2)} = \int_{x(s_1)}^{x(s_2)} \vec{v} \cdot \vec{t} ds \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} \text{um campo vetorial} \\ \vec{v} \end{array}$$

$\vec{t} = \frac{dx}{ds}$, tangente à linha de corrente

$\vec{v} = [u \times (\nabla \times u)] = [u \times w]$, normal ao vetor u

DF 44

Consequentemente $\vec{v} \perp \vec{f}$ e concluimos que
ao longo de uma linha de corrente

$$\left[\frac{1}{2} \|u\|^2 + w \right]_{x(s_2)} = \left[\frac{1}{2} \|u\|^2 + w \right]_{x(s_1)} = \text{constante} \equiv \frac{\hat{g}^2}{2} \quad (*)$$

Obs: Note que, no processo de demonstrar o iranante acima,
nós integraram a equação de conservação de quantidade
de movimento. Identifique este ponto. A lei de Bernoulli
é uma integral da Lei de Conservação de Quantidade de
Movimento.

(*) $\hat{g} =$ velocidade limite (a.f. Courant-Friedrichs pg23).
Seja $g =$ velocidade $= \|u\|$, a lei de Bernoulli nos
diz que

$$g^2 + 2w = \hat{g}^2$$

Em particular (C-F pg22) para um gás poliatópico ($w = \frac{c^2}{\gamma - 1}$)

$$g^2 + \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) c^2 = \hat{g}^2 \quad , \text{ onde } \gamma \text{ é a}$$

constante adiabática do gás (exponente) e $c^2 = \frac{dp}{dp}$ é definida
no quadrado da velocidade do som neste gás. (C-F pg5)

Dem: A demonstração segue facilmente da demonstração acima notando-se que

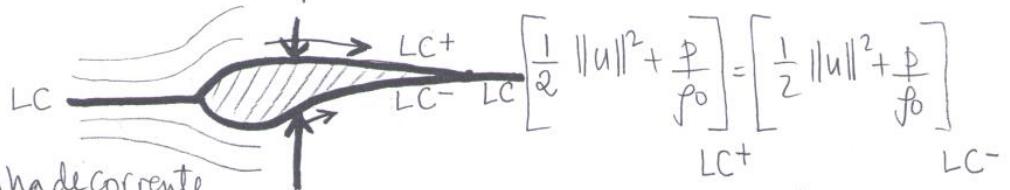
$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p \text{ para a ser escrito na forma}$$

$$(u \cdot \nabla) u = -\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right), \text{ já que } \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = 0, p(x_{10}) = p_0.$$

Obs: Note como a entalpia foi útil na integração, quando $p \neq \text{const.}$

Obs: Note que $\boxed{\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{p}{\rho_0} = \text{constante}}$ é uma verdade

simples (das possíveis leis de Bernoulli) mas que não dá uma ideia de por que os aviões voam. Seja o aerofólio abaixo



LC = linha de corrente.

O argumento de que — representa a mesma linha de corrente ficará mais claro quando estudarmos Aplicações Conformes. Mas note que no Teorema 2 temos a verdade $\nabla \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{p}{\rho_0} \right) \equiv 0$ em de corrente DIRETA da Conservação da Quantidade de Movimento. Logo

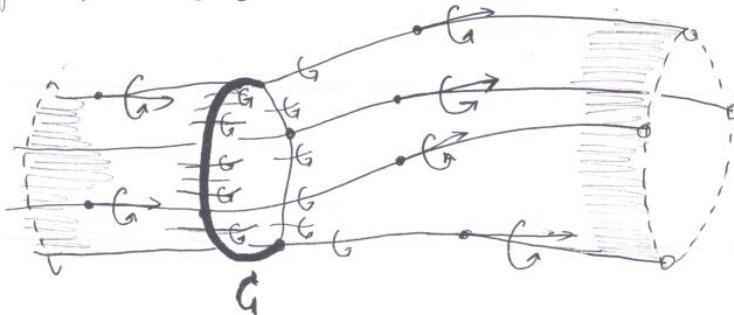
(e $\nabla \times u = 0$, neste caso escoamento irrotacional.)

$$\boxed{\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{p}{\rho_0} = \text{constante em } W}$$

Outras formas do Teorema de Bernoulli podem ser encontradas em Bourant-Friedrichs e Batchelor. Enumeraremos outras formas do teorema, conforme o contexto for exigido.

Def: Considera-se uma curva simples \tilde{C} , que pode ser reduzida a um ponto por deformação contínua.

Suponha que todos os pontos dessa curva fechada \tilde{C} pertençam à linhas de vorticidade (vide figura).

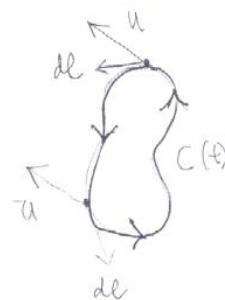


A superfície formada por todas essas linhas de vorticidade se chama de TUBO de VORTICIDADE.

É como se "euroscâneos" uma folha de vorticidade na forma de um cilindro. O campo de vorticidade é tangente às paredes do cilindro (ie do tubo de vorticidade).

Consideremos agora que a curva \tilde{C} é uma curva material. A circulação, em torno de \tilde{C} , é definida por

$$\Gamma(t; \tilde{C}) = \Gamma(t) = \oint_{\tilde{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$



ROTACÃO e VORTICIDADE (Chorin M - pg 21) (Batch pg 92)

- Definimos por vorticidade de um escoamento, a grandeza

$$\omega(x, y, z, t) = \nabla \times u$$

- Considere o seguinte exemplo:

$$u = \left(-\frac{\bar{\omega}}{2}y, \frac{\bar{\omega}}{2}x \right) \Rightarrow \nabla \times u = \bar{\omega} \vec{k}$$

\downarrow

$\|u\| = \frac{\bar{\omega}r}{2}$

intensidade
da vorticidade

$\frac{\bar{\omega}}{2} = \text{velocidade angular} = \frac{d\theta}{dt}$

Neste caso temos uma distribuição uniforme de vorticidade, como indicado na figura. Muitas vezes é interessante trabalharmos com a vorticidade em vez da velocidade. A formulação dependerá do nosso interesse e das propriedades e metas a serem atingidas em um certo problema.

Note que $\nabla \cdot u = 0$ por construção.

Em Batchelor uma definição alternativa para a vorticidade é a de que ela é definida como

$$\omega = 2 * (\text{velocidade angular local})$$

Def: De forma análoga à definicão de linhas de corrente, podemos definir LINHAS de VORTICIDADE $\vec{x}(s)$:

X

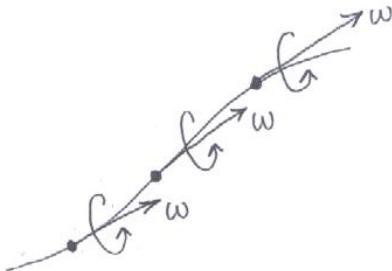
$$\frac{dx_1}{\omega_1(x,t)} = \frac{dx_2}{\omega_2(x,t)} = \frac{dx_3}{\omega_3(x,t)}$$

onde a vorticidade, no instante t , é dada por $\omega(x,t) = [\omega_1(x,t), \omega_2(x,t), \omega_3(x,t)]^T$,

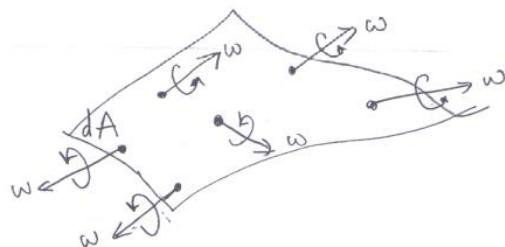
$$\vec{x}(s) = [x_1(s), x_2(s), x_3(s)]^T$$

X

- As linhas de vorticidade são curvas tangentes ao campo de vorticidade, em cada instante t :



Def: Consequentemente podemos definir uma FOLHA de VORTICIDADE como uma superfície tangente ao campo de vorticidade, em cada instante t ,



Lema: Seja C a curva material definida acima.
Então

$$\frac{d\Gamma}{dt}(t) = \oint_{C(t)} \frac{Du}{Dt} \cdot dl$$

Dem:

$$\frac{d}{dt} \oint_{C(t)} u \cdot dl = \frac{d}{dt} \int_0^1 u(\varphi_t(x(s)), t) \cdot \frac{dl}{ds} ds$$

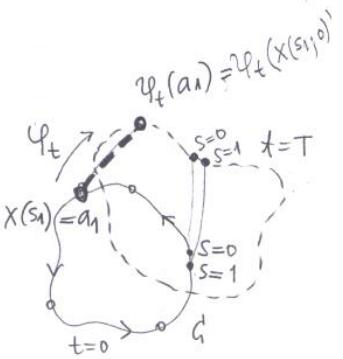
$$\left. \begin{array}{l} t=0, \frac{dl}{ds} = \frac{dx}{ds} = \vec{x} \\ t=T, \frac{dl}{ds} = \frac{d\varphi_t}{ds} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial s}(x(s), t) = \vec{x} \end{array} \right.$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dt} + u \frac{\partial \varphi_t}{\partial s} \right) \cdot \frac{dl}{ds} ds +$$

$$+ \int_0^1 u(\varphi_t(x(s)), t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi_t}{\partial s}(x(s)) ds =$$

$$= \oint_{C(t)} \frac{Du}{Dt} \cdot dl + \int_0^1 u(\varphi_t(x(s)), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x(s)) ds,$$



$\varphi_t(x(s_1)) = \varphi_t(a_1)$
dados iniciais.

Obs: Note que
 $x(s)$ é a varável dependente do tempo:
 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$

Mas note que $\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x(s)) = u(\varphi_t(x(s)), t)$, já que φ_t indica a órbita da partícula que no tempo $t=0$ estava em $x(s)=a$.

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = \oint_{C(t)} \frac{Du}{Dt} \cdot dl + \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (u \cdot u) ds.$$

↑
diferencial exato. //

Teorema da CIRCULAÇÃO de KELVIN (1869)

Versão 1

Seja um fluido inviscido, incompressível com densidade uniforme e força de massa conservativa (ie., $\mathbf{f} = -\nabla \Phi$), então temos conservação de circulação ao longo de curvas materiais:

(versão Batch 273)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Gamma(t; C) = 0}$$

Dem: Eq. de Euler:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi - \nabla B = \nabla \left(-\frac{p}{\rho_0} - \Phi \right)$$

- Pelo lema anterior,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{C(t)} \nabla \left(-\frac{p}{\rho_0} - \Phi \right) \cdot dl = - \iint_S (\nabla \times \nabla \left(-\frac{p}{\rho_0} - \Phi \right)) \cdot n dS$$

pelo Teorema de Stokes $\left[\oint_C \mathbf{v} \cdot dl = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot n dS \right]$.

Concluímos que $\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0}$ pois o rotacional de

um gradiente é sempre nulo.

○ Versão 2 (Chorin & Marsden).

Seja um escoamento isoentrópico (é sem força de mana).

Então a circulação é conservada;

Γ ou com força
de mana conservativa

$$\boxed{\frac{d\Gamma(t; \zeta)}{dt} = 0}$$

Dem: $\frac{Dn}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \phi = -\nabla w$

O resultado segue

○ Versão 3 (trivial)

Seja um escoamento irrotacional ($\nabla \times u = \omega = 0$).

Então $\Gamma(t) \equiv 0$,

Dem:

$$\boxed{\oint_{C(t)} u \cdot dl = \iint_{S(t)} \omega \cdot n dS}, \text{ onde } S(t) \text{ é uma superfície}$$



material limitada pela curva $C(t)$. O resultado segue.

Obs: Note que circulação ao longo de uma curva material pode ser interpretada como o fluxo de vorticidade através de qualquer superfície material limitada pela curva C .

Obs: Ver comentários em Chorin & Marsden sobre 2ª parte em 2D (pg 26) DF 52
 $(\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u})$ ser $\tilde{\omega}/p(\varphi(x), t) = \tilde{\omega}/p(x_0)$, importante ingrediente na demonstração de exist. & unicidad (2D)

Obs: Outras versões de Conservação de Circulações podem, por exemplo, serem encontradas em Courant-Friedrichs pag. 19.

(Enter & N-Stokes)
 C-Marsden (pg 28).

Aplicação do Teorema da Circulação de Kelvin:

○ Teorema: Uma superfície (curva) material se move de acordo com um escoramento isoentrópico. Se no instante inicial ela é uma folha (linha) de vorticidade, então ela permanecerá como tal para todo tempo.

Dem:

$$\textcircled{1} = \iint_{S(t)} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{porque a vorticidade é} \\ \text{tangente à } S(t) = \text{folha de vorticidade} \end{array}$$

um pedaço arbitrário

da folha de vorticidade

Pelo Teorema da Circulação de Kelvin

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = 0 \quad \text{para escoramentos isoentrópicos.}$$

Logo como $\Gamma(0) = 0$ implica em $\Gamma(t) = 0$, temos

que

$$\iint_{S(t)} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{w} \perp \vec{n}, \forall t \geq 0,$$

O caso da linha de vorticidade pode ser visto como a intersecção de 2 folhas de vorticidade.

① Teorema: Seja $\tilde{\omega} = \nabla \times u$ a vorticidade e $w = \frac{\tilde{\omega}}{\rho}$ a vorticidade específica, em um escoamento isentroáptico. Então

$$\boxed{\frac{Dw}{Dt} - (\omega \cdot \nabla) u = 0}$$

e $\boxed{w(\varphi_t(x), t) = \nabla \varphi_t(x) \cdot w(x_{10})}$, onde

φ_t é a aplicação do escoamento e $\nabla \varphi_t$ a matriz Jacobiana (vide derivação da lei de Conservação de Massa DF27)

Dem: Seja a identidade vetorial (Chorin & Marsden pg 165)

$$\frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) = u \times \nabla \times u + (u \cdot \nabla)u$$

e considere ~~o balanço da~~ Quantidade de Movimento:

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla w \oplus \nabla B \quad \text{Usando a identidade acima} \quad X$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) = u \times \nabla \times u - \nabla(w + B)$$

Tomemos o rotacional desta equação. (\Rightarrow gradientes são eliminados):

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = \nabla \times u \times \tilde{\omega} = u(\nabla \cdot \tilde{\omega}) - \tilde{\omega}(\nabla \cdot u) + (\tilde{\omega} \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)\tilde{\omega}$$

pela id. (12) Chorin & Marsden pg 165.

DFSY

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{w} - (\tilde{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tilde{w} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \tilde{w}) = 0$$

$$\boxed{\frac{D\tilde{w}}{Dt} - (\tilde{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tilde{w} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0}$$

(+ enado no Chorin)

Agora $\frac{D}{Dt} \left(\frac{\tilde{w}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\tilde{w}}{Dt} - \frac{\tilde{w}}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} =$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{D\tilde{w}}{Dt} + \frac{\tilde{w}}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Balanço de massa

Logo dividindo a. edp acima por o tempo que

$$\boxed{\frac{Dw}{Dt} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0}$$

Eq. de Transporte
de vorticidade

Para a segunda parte consulte Chorin & Marsden.

Obs: Para um escoamento 2D $\mathbf{u} + \mathbf{w} = [0, 0, w]^T$

$(\mathbf{w} \cdot \nabla) u_i = w \frac{\partial u_i}{\partial z} \equiv 0$. Em 2D vorticidade

específica é uma grandeza material, ou seja,
a vorticidade específica acompanha a partícula à qual
ela está associada no instante inicial.

→ (derivada direcional, na direção de \tilde{w}): $\frac{Dw}{Dt} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} > 0 \Rightarrow$ stretching
(alongamento)
 $\mathbf{u} \uparrow$ direção de \tilde{w} .

O termo $(\omega \cdot \nabla) u$ está relacionado com um efeito de deformação da ^{de tubo de} vorticidade, chamado de alongamento de vórtices ("vortex stretching"), onde alongamento pode significar encurtamento (sic). dependendo do seu valor.

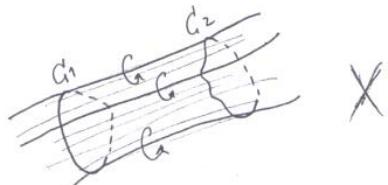
Antes de discutir mais a questão do alongamento de vórtices vejamos o Seguinte

TEOREMAS de HELMHOLTZ :

Seja um escoamento isoentrópico, (para que tubos sejam sup. materiais) DF52

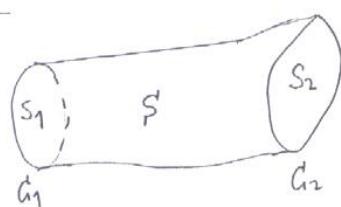
- TEOREMA A : Se C_1 e C_2 são 2 curvas quaisquer em torno de um tubo de vorticidade, então

$$\oint_{C_1} u \cdot ds = \oint_{C_2} u \cdot ds = \alpha$$



onde α é definida como a INTENSIDADE do tubo de vorticidade.

Dem:



S = superfície lateral

S_1, S_2 = superfícies extremas

\mathcal{V} = interior

Temos que $\omega = \nabla \times u$ e por isso

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \omega dV = 0$$

DF 56

- Pelo Teorema de Gauss (divergência)

$$\int_{V_2} \nabla \cdot w dV = \int_{\partial V_2} w \cdot n dS = \int_{\partial V_2} w \cdot n dS' =$$

Stokes

$$= - \oint_{C_1(t)} u \cdot dl + \oint_{C_2(t)} u \cdot dl = 0$$

$$\oint_{C_1(t)} u \cdot dl = \oint_{C_2(t)} u \cdot dl$$

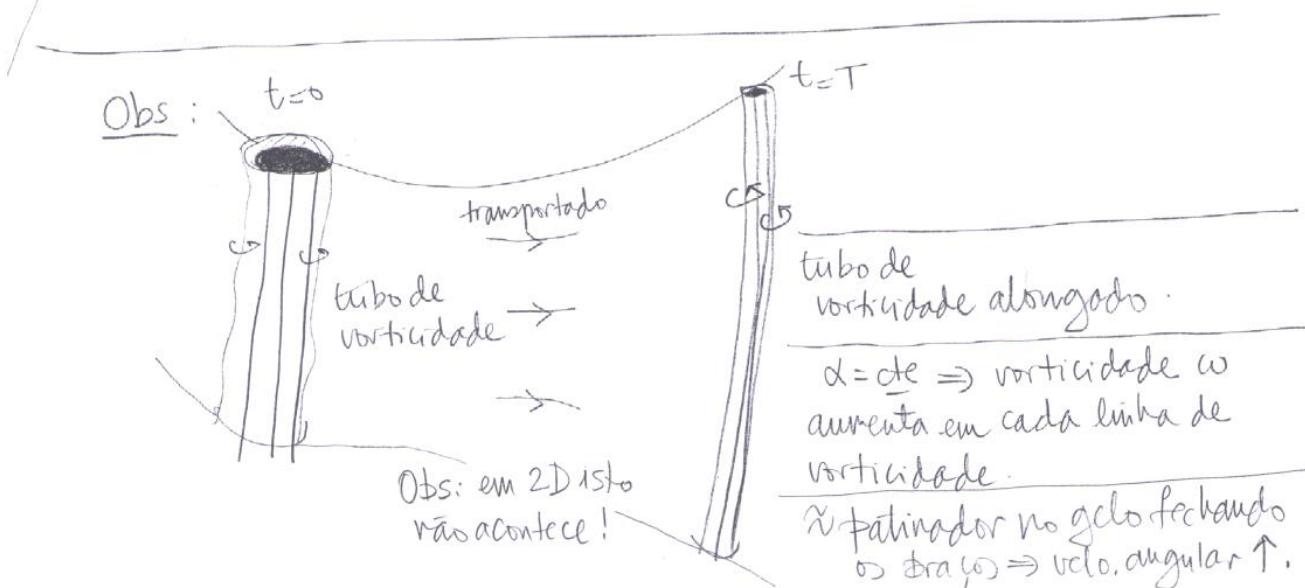


- TEOREMA B: A intensidade do tubo de vorticidade (α) é uma constante no tempo, conforme o tubo é transportado pelo escoamento.

Dem: $\alpha = \oint_{C_1(t)} u \cdot dl = \Gamma(t)$



Segue da conservação de circulação de Kelvin.





FUVIDOS HOMOGÉNEOS, INVISCIDOS e INCOMPRESSÍVEIS.



ESCOAMENTO IRROTACIONAL

No tópico desta seção fizemos as hipóteses de um fluido ideal, onde a sua compressibilidade é desprezível e a vorticidade inicial é nula. Pela conservação de circulação, o escoamento é irrotacional para todo tempo. Estamos no regime chamado de ESCOAMENTO POTENCIAL, pois utilizaremos a teoria do potencial. Vamos provar.

(usei texto extraído de Nachbin A. & Tabak E., Introdução à Modelagem Matemática e Computação Científica II, XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), Gramado, 1997. O nível do curso foi licenciatura científica)

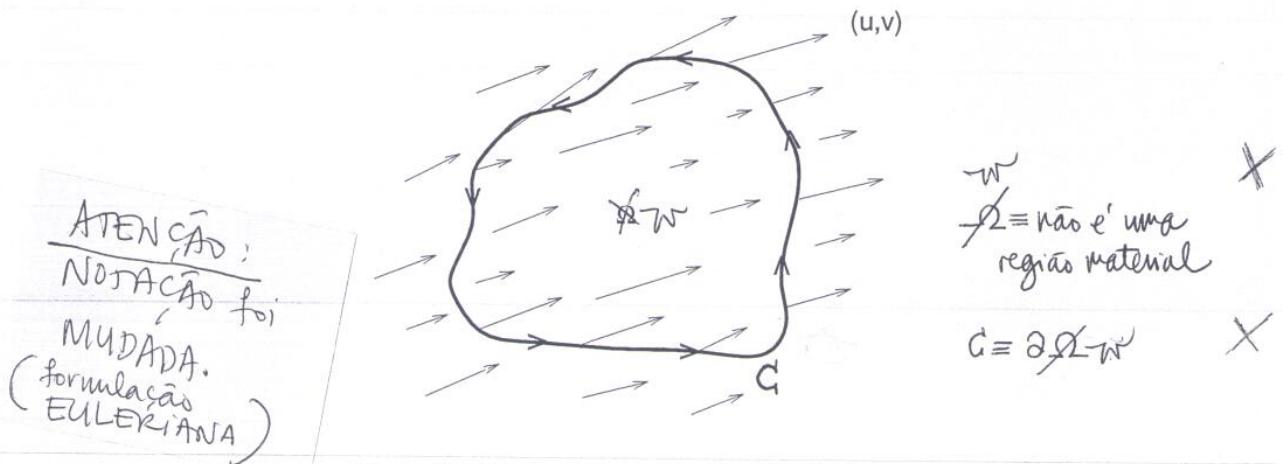


Figure 0.1: Vista superior do domínio de fluido.

0.1 Variáveis complexas e dinâmica dos fluidos

Vamos imaginar que temos a vista superior do escoamento de água num rio. Tiramos uma foto e em cada ponto do rio marcamos a velocidade da água, supondo que temos acesso a esses valores. O vetor velocidade $\vec{U} = (u, v)$ representa a velocidade de uma partícula de água que, no instante da foto, se encontrava no ponto onde desenhamos o vetor (veja a figura 0.1). Em matematiquês escrevemos isto na forma

$$u(x, y, t) = \frac{dx}{dt}$$

e

$$v(x, y, t) = \frac{dy}{dt}, \quad \text{transversal}$$

onde $(x(t), y(t))$ é o vetor posição de uma partícula genérica da água no rio. A velocidade na direção horizontal é $u(x, y, t)$ e na direção vertical $v(x, y, t)$.

Fazemos um controle do escoamento do rio da seguinte maneira. Para ter uma idéia da quantidade de redemoinhos vamos desenhar curvas fechadas (indicadas

prévio

OBS: notações confusa no texto original

No fundo acho que tanto faz
mas com a formulação
dele é mais fácil trabalhar
com curvas não-matematicas.

DF 59

\int_{Γ} analizar rotacão
por \oint na superfície do rio e calcular a sua circulação: ao longo da mesma

$$\text{circulação} \equiv \oint (\vec{U} \cdot \vec{t}) ds, \quad (0.1)$$

onde \vec{t} representa o vetor unitário tangente à curva Γ e s é comprimento de arco.

O sentido positivo para se percorrer Γ é o anti-horário. O que estamos fazendo?

Estamos somando todas as projeções do vetor velocidade na direção tangente à

Γ . Se o resultado for um número positivo então temos o efeito de um redemoinho girando no sentido anti-horário (positivo na regra da mão-direita). Se for um número negativo temos o efeito de um redemoinho girando no sentido horário. Se for zero, não há circulação ao longo da curva Γ escolhida.

Controlemos outra grandeza: o fluxo normal através dessa mesma curva Γ . Isso é feito através da integral de linha abaixo:

se forçar curva material (compreensão)

$$\text{fluxo normal} \equiv \oint (\vec{U} \cdot \vec{n}) ds. \quad (0.2)$$

O vetor unitário normal à Γ (\vec{n}) é positivo quando aponta para fora. Neste caso estamos somando todas as contribuições de entrada e saída de água através da fronteira Γ . Se o balanço total, de entrada e saída, for positivo é porque saiu mais água do que entrou. Lembre-se que a normal é positiva para fora. A interpretação é que temos uma fonte de água em algum ponto de Γ . Se a integral for negativa, então entrou mais água do que saiu, e por isso, deve haver um "ralo" (sumidouro) dentro do domínio Ω .

Mas vamos nos concentrar nos casos em que o escoamento é irrotacional (sem redemoinhos) e incompressível (em qualquer região o volume de água que entra é igual ao volume que sai). Colocando isto na forma de uma expressão matemática temos que, para qualquer curva Γ arbitrariamente

$$\oint (\vec{U} \cdot \vec{t}) ds = 0$$

e

$$\oint_{\partial \Omega} (\vec{U} \cdot \vec{n}) ds = 0.$$

Usemos o Teorema de Green

$$\oint_{\partial \Omega} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy,$$

para escrever as integrais de linha, dadas acima, na forma

$$\int \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{U}) dx dy = 0$$

e

$$\int \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{U}) dx dy = 0.$$

Como essa identidade é válida para quaisquer curvas $\partial \Omega$ e seu respectivo interior Ω , concluímos que cada integrando deve ser identicamente nulo. Em outras palavras, concluímos que

$$\boxed{\nabla \times \vec{U} = 0} \quad (0.3)$$

e que

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{U} = 0.} \quad (0.4)$$

Consideremos inicialmente regiões simplesmente conexas.

Quando o escoamento é irrotacional, podemos definir a função potencial

$$\phi(x, y, t) = \phi_0 + \int_{P_0}^P (u dx + v dy), \quad (0.5)$$

onde $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$ são dois pontos ligados por um trecho da curva

e $\phi_0 = \phi(x_0, y_0, t)$. Veja a figura 0.2. Esta função é chamada de um potencial

pois $(u, v) = \nabla \phi = (\phi_x, \phi_y)$. Verificar este fato é um ótimo exercício em Cálculo.

Separar a integral em x da integral em y , como nas linhas pontilhadas da figura 0.2.

EX
single-valued
ou não
de rotação

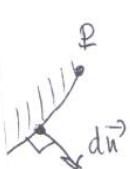
Da mesma forma, quando o escoamento é incompressível, podemos definir a

função de corrente

$$\psi(x, y, t) = \psi_0 + \int_{P_0}^P (udy - vdx).$$

$$\begin{array}{c} (dx, dy) \\ (dy, -dx) \end{array} \quad (0.6)$$

$$\begin{aligned} & \vec{u} \cdot \vec{d}\vec{n} \\ &= (\nabla \psi, \vec{d}\vec{n}) = (u, v)(dy, -dx) \\ &= (-v, u)(dx, dy) \end{aligned}$$



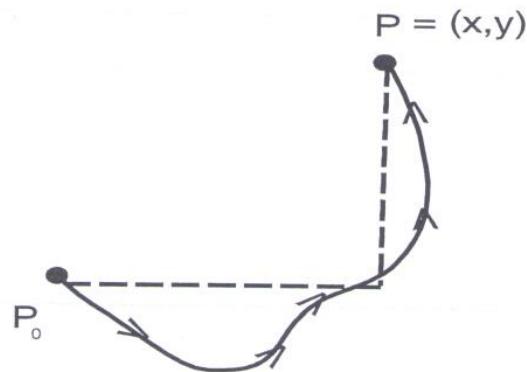


Figure 0.2: Integral de linha ao longo de um trecho da curva Γ .

Neste caso $(u, v) = \nabla^\perp \psi = (\psi_y, -\psi_x)$. A notação é tal que, para uma função f com duas derivadas contínuas, $\nabla \cdot \nabla^\perp = 0$, no sentido que $f_{xy} - f_{yx} = 0$. Porque essa função se chama função de corrente? Este nome vem do fato da função nos permitir visualizar o escoamento no caso estacionário. Vamos entender melhor esta afirmação. Calculemos

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Usando o fato de o escoamento ser estacionário ($\partial\psi/\partial t = 0$) e as definições para as velocidades, escrevemos

para uma linha de corrente $\psi = \text{const.}$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$\nabla\psi \cdot \vec{U} = 0, \quad \text{ou} \quad \vec{U} \cdot \nabla\psi = 0 \quad (\text{derivada direcional})$$

ou seja, o campo de velocidades é tangente às linhas de corrente ~~nesta~~ *que* neste caso São $\psi = \text{constante}$. Isso vem do fato de que o gradiente da função de corrente é ortogonal ao campo de velocidades. As partículas do fluido irão descrever trajetórias

dadas pelas curvas $\psi = \text{constante}$. Adiante apresentaremos exemplos que confirmão esta propriedade.

Vamos começar a migrar para o mundo das variáveis complexas. Esta é uma decisão a nível do modelo matemático. Em vez de usarmos o modelo proveniente de equações diferenciais parciais (veja a equação de Laplace abaixo), optamos pelo modelo proveniente de variáveis complexas. Comecemos com algumas observações meio soltas ... Escoamentos irrotacionais e incompressíveis nos levaram a

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \rightarrow u_x = (-v)_y$$

e

$$\nabla \times \vec{U} = 0 \rightarrow u_y = -(-v)_x.$$

Estas são as famosas equações de Cauchy-Riemann para u e $-v$. Elas aparecem em cursos de edp's e também de variáveis complexas (Churchill e Brown; Lins Neto). Note que se usarmos a primeira equação de Cauchy-Riemann e considerarmos o fato do escoamento ser irrotacional, temos que a função potencial é uma função harmônica, ou seja, satisfaz a equação de Laplace

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0.$$

Da mesma maneira, se usarmos a segunda equação de Cauchy-Riemann considerando um escoamento incompressível, temos que a função de corrente também é harmônica:

$$\Delta \Psi = 0.$$

Temos duas funções harmônicas ϕ e ψ , que podemos considerar como sendo a parte real e imaginária de uma função complexa:

$$\Phi = \phi + i\psi, \quad (0.7)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e o potencial complexo Φ é uma função de $z = x + i y$. A definição de derivada de uma função complexa $f(z)$, com respeito à variável complexa z , é

dada por

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A definição vale para z tendendo a z_0 em qualquer direção. Logo ela é válida para z tendendo a z_0 , tanto na direção paralela ao eixo dos x como na direção paralela ao eixo dos y . É dessa maneira que se obtém as expressões envolvendo derivadas parciais em x e em y . Dê um nome à parte real de $f(z)$ (por exemplo $\xi(x, y)$) e outro à imaginária (por exemplo $\zeta(x, y)$). Substitua essa decomposição $f = \xi + i \zeta$ na identidade

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}} \quad f = f(z)$$

para obter as equações de Cauchy-Riemann em ξ e ζ .

Terminada essa breve revisão de variáveis complexas, vamos calcular a derivada do potencial complexo:

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dz} = \phi_x + i \psi_x = -i (\phi_y + i \psi_y) = u - i v = \frac{d\bar{z}}{dt}.} \quad (0.8)$$

A barra sobre o z significa conjugação complexa: $\bar{z} = x - i y$.

Note que fizemos uma coisa muito interessante. Calculando apenas uma derivada complexa estaremos calculando duas velocidades. Existem muitos resultados da teoria de variáveis complexas que podem ser usados imediatamente, a serviço da dinâmica dos fluidos. Não vamos mostrar explicitamente, mas o tema principal é *Aplicações Conformes*. Esperamos convencer o leitor de todos esses fatos, através dos exemplos a seguir!

Exemplo 1: Vamos começar com o escoamento uniforme representado pela figura 0.3. O potencial é obtido facilmente por inspeção: $\Phi(z) = Az$. Uma coisa é certa. As linhas de corrente ($\psi(x, y) = \text{constante}$) são linhas horizontais. Verifique!

A velocidade complexa é

$$\Phi = Ax + iAy \Rightarrow \Psi = Ay = \text{const.} \\ \Rightarrow y = \text{const.}$$

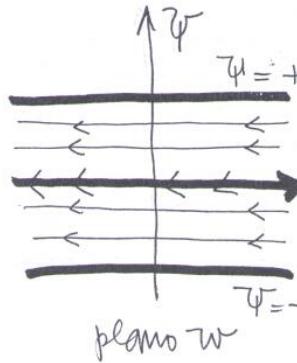
$$\frac{d\Phi}{dz} = A = u - i v \rightarrow (u, v) = (A, 0).$$

DF 6

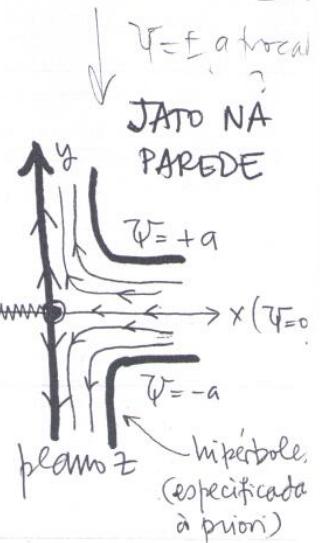
Trivialmente podemos considerar as seguintes situações:

$$W = \Phi(z) = -z^2$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = -2z = -2x - i2y$$



plano ψ

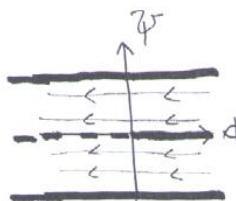


$$\begin{cases} U(x,y) = -2x \\ V(x,y) = 2y \end{cases} > \text{compare com as setas nas linhas de corrente}$$

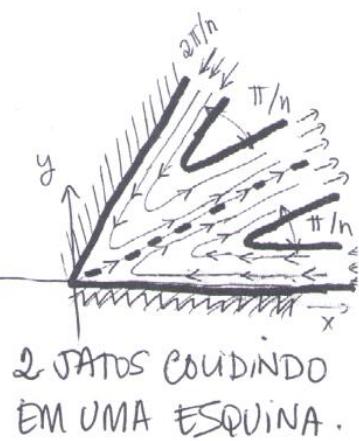
Obs: $\odot(x,y) = (0,0)$ é um ponto de ESTAGNAÇÃO, isto é, ponto onde a velocidade se anula ou seja $\frac{d\Phi}{dz} = 0$ e a aplicação NÃO é

CONFORME (não preserva ângulos).

$$W = \Phi(z) = -z^n$$



A origem é um ponto de estagnação de ordem n (ordem do zero do polinômio)



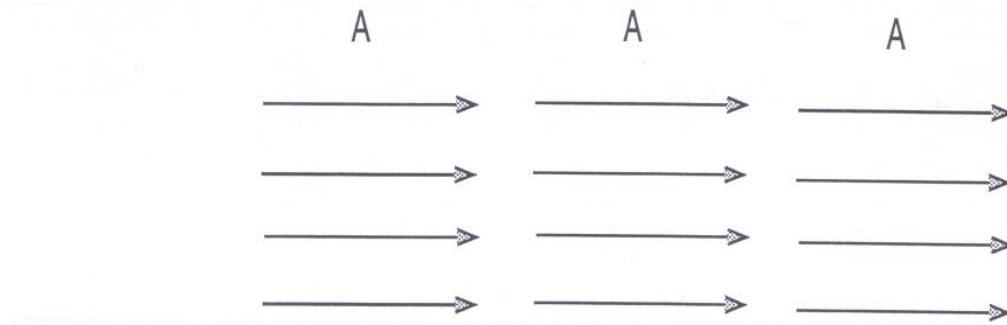


Figure 0.3: Escoamento uniforme com velocidade horizontal igual a A .

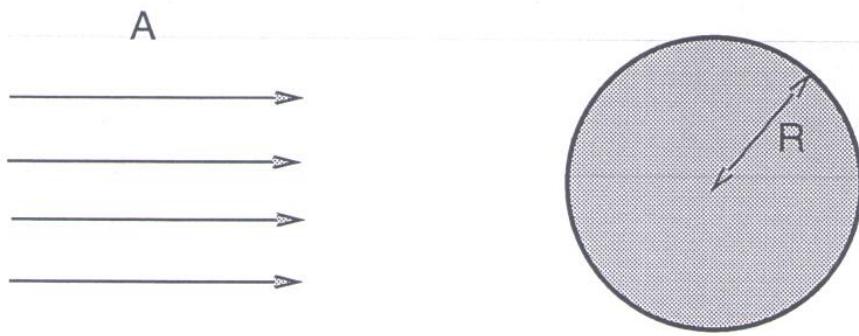


Figure 0.4: Cilindro de raio R na presença de um escoamento uniforme.

Exemplo 2: Vamos colocar um cilindro circular, de raio R , no caminho do escoamento uniforme do exemplo 1. Veja a figura 0.4. Agora temos um rio, visto de cima, e uma coluna de uma ponte ou de um pier. Como será o escoamento laminar (sem turbulência) em torno desta coluna? Bastou colocar a coluna e o problema já fica bem mais difícil! Não dá para usar inspeção. Na literatura de dinâmica dos fluidos (Milne-Thomson) existe o Teorema do Círculo, que enunciamos a seguir:

B422

Seja o potencial complexo livre (i.e. sem obstáculos) dado por $f(z)$, uma função diferenciável na região $|z| \leq R$. Então, na presença de um cilindro de raio R , centrado na origem, o potencial complexo é dado por

$$\Phi(z) = f(z) + \bar{f}(R^2/\bar{z}). \quad (0.9)$$

Para o leitor que tem uma formação um pouco mais avançada em variáveis complexas, é fácil argumentar que o teorema acima pode ser aplicado para cilindros de seção transversal não-circulares. Temos que fazer a seguinte modificação. A existência de tais escoamentos é garantida pelo Teorema de Uniformização de Riemann (ver Lins Neto) que fala sobre a aplicação conforme de regiões simplesmente conexas em um disco unitário. O resultado final é obtido a partir da composição $\Phi(z(w))$, onde $z(w)$ representa o mapeamento de um cilindro não-circular (no plano complexo w) para um cilindro circular (no plano complexo z). Vale ressaltar que o Teorema do Círculo nada mais é do que uma variante do Princípio de Reflexão de Schwarz (Churchill e Brown; Lins Neto). No Teorema do Círculo, a reflexão é feita com respeito ao círculo. A reflexão de z , com relação ao círculo, é denotada por $\boxed{z^* = R^2/\bar{z}}$.

Vamos usar o resultado do Teorema do Círculo para o ponto $z = Re^{i\theta}$ sobre o círculo:

$$\Phi(z) = f(Re^{i\theta}) + \bar{f}(R^2/Re^{-i\theta}) = f(z) + \bar{f}(z) = 2Re(f),$$

onde Re representa a parte real de f . Sobre o círculo temos que $\psi(x, y) = 0$. Logo o escoamento é na direção dessa linha de corrente e por isso a água desliza em torno do cilindro, acompanhando a sua forma. No caso de $f(z) = Az$ as linhas de corrente estão esboçadas na figura 0.5. Este tipo de configuração aparece em escoamentos reais. Uma ótima referência é o livro *An Album of Fluid Motion* (fotos nos. 1, 6 e 24), que é composto apenas por fotos de experimentos em laboratório (Van Dyke).

Teorema do Círculo :

analisabilidade em $|z| < R \Rightarrow$ que propriedades assintóticas
não mudam. pós singularidades não serão
refletidas (por ex. uma singularidade em $z=0$
irá para no infinito).

\Rightarrow não faz sentido físico termos,

antes de colocar um cilindro, um vórtice ou uma
fonte nesta região $|z| < R$.

DF66A

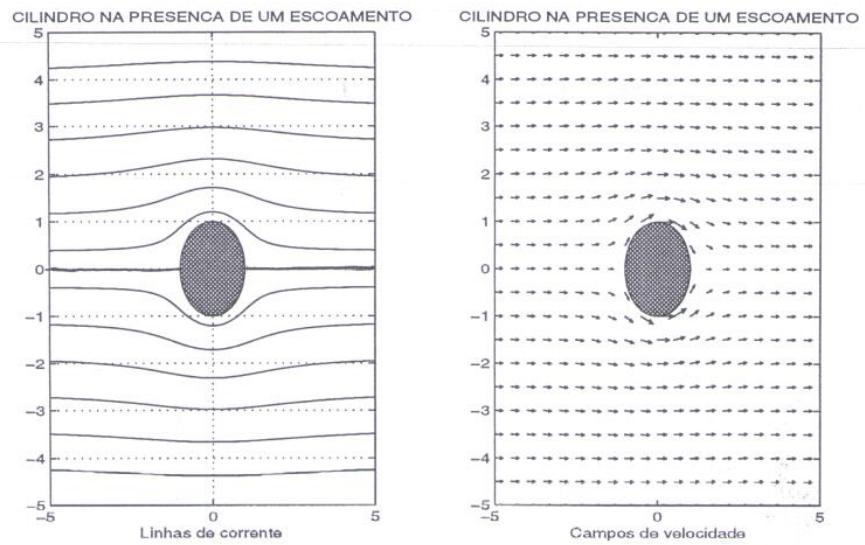


Figure 0.5: Linhas de corrente para um cilindro de raio R na presença de um escoamento uniforme.

DF67



TEOREMA de BLASIUS (1910)

B433-434

irrotacional (?)

Considere um escoamento potencial estacionário em torno de um obstáculo fixo de seção transversal B .

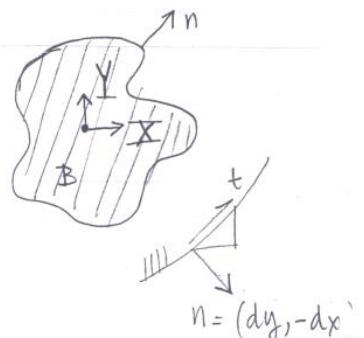
Seja o escoamento identificado pelo potencial complexo $w(z)$ e a força $[X, Y]^T$, sobre o obstáculo, pela função

$$F = X - iY \quad . \text{ Então}$$

Acheson 140

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint_B \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

e



$$M_o = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint_B \left(\frac{dw}{dz} \right)_z dz \right\}, \text{ onde } M_o \text{ é } .$$

Momento em torno da origem. (*)

Demonstração:

$$n = (dy, -dx) \quad df = \overbrace{-p}^{T_{11}} \underbrace{(dy, -dx)}_n = (dX, dY)$$

$$\text{na forma complexa: } df = dX - i dY = -p dy - i(p dx) \\ = -ip(dx - i dy) = \boxed{-ip d\bar{z}}$$

Porque definir $F = X - iY$ e $df = dX - i dY$? Isto é em decorrência da regra da complexa $\frac{dw}{dz} = u - i v$. ($F = m \cdot \text{aceleração} = m \frac{du}{dt} - i m \frac{dv}{dt}$)

(*) Obs: gravidade ignorada

Note que os resultados são escutos em termos de dw/dz .

Precisando da pressão:

DF68

Pela lei de Bernoulli que diz que

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\|u\|^2}{2} = \text{constante, digamos } H.$$

Logo $p = \rho H - \frac{\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}} \right)$. Então

$$F = \oint_{\partial B} df = -i\rho H \oint_{\partial B} d\bar{z} + \frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B} \frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}} d\bar{z}$$

Finalmente

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 d\bar{z}, \text{ pois}$$

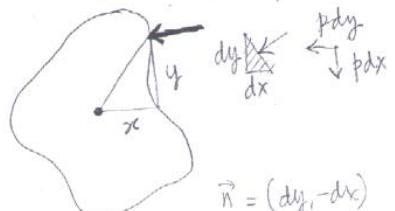
flui rotacionando e é real: EXERCÍCIO

$$\frac{dw}{dz} d\bar{z} = \frac{dw}{dz} dz$$

$$\left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) (dx - i dy) = \left(\frac{dx}{dt} - i \frac{dy}{dt} \right) (dx + i dy)$$

Para o momento temos que

$$M_o = \oint_{\partial B} p x dx + p y dy =$$



$$= \oint_{\partial B} -\underbrace{\frac{p}{2} \left(\frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}} \right)}_P \operatorname{Re}(z d\bar{z}) =$$

$$\vec{n} = (dy, -dx)$$

$$-p\vec{n} = (pdy, pdx)$$

$$\Rightarrow \text{Momen: } M_o = \vec{F} \cdot \vec{A}$$

i	j	k
x	y	0
$-pdy$	pdx	0

$$= -\frac{p}{2} \operatorname{Re} \oint_{\partial B} \frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}} z d\bar{z} = -\frac{p}{2} \operatorname{Re} \oint_{\partial B} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z d\bar{z},$$

Obs: Para não se preocupar com a definição $F = \mathbb{X} - i\mathbb{Y}$, Chorin & Marsden conjugam o resultado:

$$F = \left[\frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 d\bar{z} \right]$$

Obs! Considere um círculo C englobando o contorno $2B$.

Se o escoamento potencial $w(z)$ for tal que não existem Singularidades entre C e $2B$, então podemos usar o Teorema de Cauchy e substituir as integrais do Teorema de Blasius por integrais sobre C . Isto é particularmente útil quando o comportamento assintótico de $w(z)$, longe do obstáculo, for conhecido.

Obs: ① A força em um obstáculo B não é invariante por uma aplicação conforme.

② A circulação é invariante.

Obs: A Componente de F normal ao escoamento é a sustentação.
 " " " " " F na direção contrária ao escoamento é a força de arrasto.
 " " " " " dando a forma da abóbada.
 (não há fricção no modelo!)

■ Estudaremos agora um dos principios básicos que fazem um avião voar.

Seja o potencial complexo

$$w(z) = A\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + i\frac{K}{2\pi} \log \frac{z}{R},$$

onde a velocidade longe do cilindro de raio R é dada por $[A, 0]^T$ e a circulação em torno do cilindro é dada por (K) . Verifique!

DF 70

Calculemos os pontos de estagnação

$$\frac{dw}{dt} = A \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i}{2\pi} \frac{k}{z} = A + \left(\frac{iR}{z}\right)^2 A + \left(\frac{iR}{z}\right) \frac{k}{2\pi R}$$

Seja $\alpha = \frac{iR}{z}$ temos que

$$\alpha = \frac{-\frac{k}{2\pi R} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2\pi R}\right)^2 - 4A^2}}{2A}$$

Termos 3 casos

$$0 < \frac{k}{AR} < 4\pi$$

raízes complexas

(1)

$$\frac{k}{AR} = 4\pi$$

duplas

(2)

$$\frac{k}{AR} > 4\pi$$

reais

(3)

Caso (1) ⇒ raízes complexas

$$\alpha = -\frac{k}{4\pi AR} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{4\pi AR}\right)^2 - 1} =$$

$$= -\sin\beta \pm i \cos\beta, \text{ ao definirmos}$$

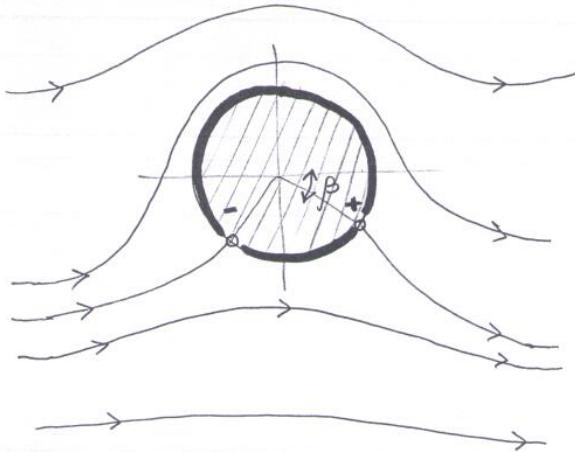
$$\sin\beta \equiv \frac{k}{4\pi AR} < 1$$

$$\text{Logo } \frac{iR}{z} = i(\pm \cos\beta + i \sin\beta)$$

$$\begin{cases} z_+ = R e^{-i\beta} \\ z_- = -R e^{i\beta} \end{cases}$$

estão sobre
o obstáculo B.

DF71



Note que:

$\sin \beta = 0$ quando $K=0$ (caso sem circulação)

Caso ② \Rightarrow raízes duplas

$$\text{exatamente quando } \frac{K}{4\pi AR} = 1 = \sin \beta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

os pontos de estagnação z_+ e z_- coalescem.

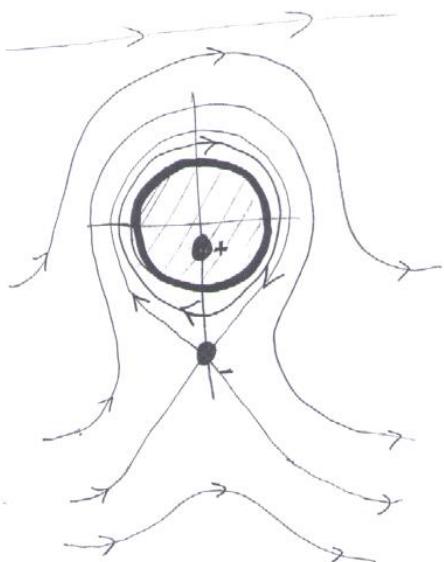


Caso ③ \Rightarrow raízes reais

$$\alpha_+ = -\frac{K}{4\pi AR} + \sqrt{\left(\frac{K}{4\pi AR}\right)^2 - 1}$$

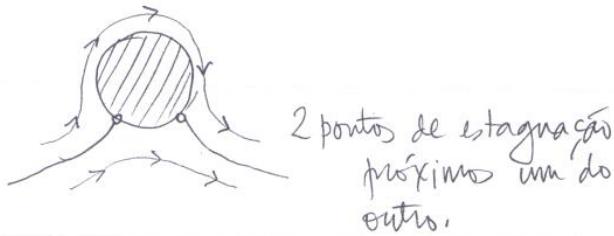
$$\alpha_- = -\frac{K}{4\pi AR} - \sqrt{\left(\frac{K}{4\pi AR}\right)^2 - 1}$$

$$\alpha = \frac{iR}{z} \Rightarrow \boxed{z_{\pm} = i \frac{R}{\alpha_{\pm}}} \\ \text{ao longo do eixo dos } y$$



(1 → 2 → 3)

- Note que conforme K aumenta, a partir de zero, vemos que a velocidade na parte superior do cilindro aumenta enquanto que na parte inferior diminui:



Pela lei de Bernoulli vemos que a pressão na parte inferior será maior do que na parte superior do cilindro.

Pelo Teorema de Blasius temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left[A \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{i}{2\pi} \frac{K}{z} \right]^2 dz = \\ &= \text{pelo Teorema de Cauchy} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{2A i K}{2\pi z} dz = \frac{i\rho}{2} \left[2\pi i \left(\frac{2AKi}{2\pi} \right) \right] \end{aligned}$$

X
Só a parte linear em $1/z$ contribui
não basta só ter circulação (ao quadrado vai gerar lift)

Cogo $\mathbf{F} = \mathbf{X} - i\mathbf{Y} = -i\rho A K \rightarrow$

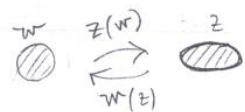
$\mathbf{X} = 0$	→ arrasto zero
$\mathbf{Y} = \rho A K$	→ sustentamento devido à circulação

Mesmo sendo um modelo exageradamente simplificado, vemos complexa, nos revela um ingrediente importante na sustentação de um aerofólio: a circulação.

Vejamos as seguintes extensões para o problema do cilindro ilustrado acima.

Considere um obstáculo elíptico. Considere a aplicação conforme

$$\boxed{z = w + \frac{\lambda^2}{w}}, \quad \lambda \text{ uma constante real.}$$



○ Para um círculo no plano-w temos no plano-z

$$z = Re^{i\theta} + \frac{\lambda^2}{Re^{i\theta}} = \left(R + \frac{\lambda^2}{R} \right) \cos \theta + i \left(R - \frac{\lambda^2}{R} \right) \sin \theta$$

Logo $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ onde

$\boxed{a = \left(R + \frac{\lambda^2}{R} \right)}$ e $\boxed{b = \left(R - \frac{\lambda^2}{R} \right)}$, levando

um círculo de raio R em uma elipse, com eixos $2a$ e $2b$. O potencial complexo

$$\Phi(w) = A \left(w + \frac{R^2}{w} \right) + i \frac{k}{2\pi} \log \left(\frac{w}{R} \right)$$

reescrito na forma

$$\Phi(z) = A \left(w(z) + \frac{R^2}{w(z)} \right) + i \frac{k}{2\pi} \log \left(\frac{w(z)}{R} \right),$$

inverte-se:

$$w(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2} (z^2 - 4\lambda^2)^{1/2}$$

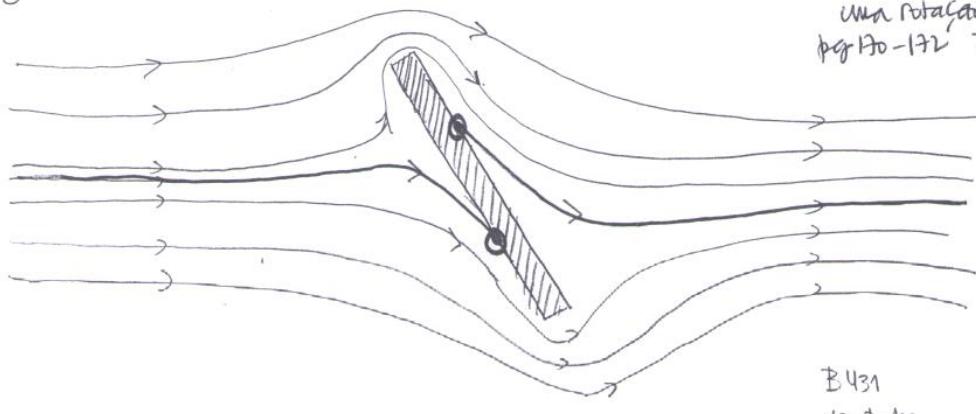
III $z = w + \frac{\lambda^2}{w}$

DF 74

(B428-(6.6.9))

representa o escoamento (análogo ao anterior) em torno de um cilindro elíptico com circulações $(-k)$ e velocidade $[A, 0]^T$ no infinito. (veja o comportamento assimótico da transformação conforme \Rightarrow força é a mesma neste caso!)

Se o parâmetro λ for tornado igual a R , a elipse vira uma placa. Ajustando o ângulo de incidência do escoamento no infinito, podemos representar a seguinte configuração:



ver efeito de colocar
uma rotação Milne-Thompson
pg 170-172 Clze

B431
van Dyke

Podemos generalizar o resultado para o cálculo da força sobre o cilindro (DF 72), como o seguinte teorema:

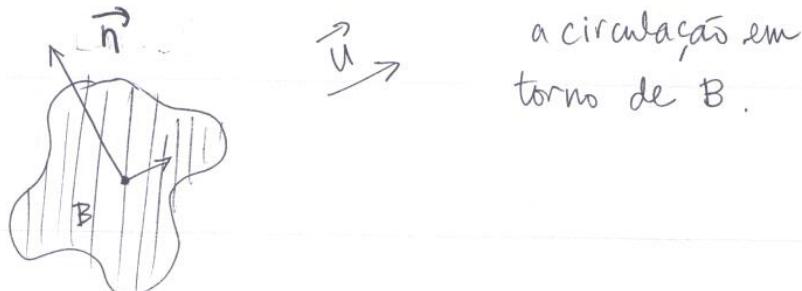
TEOREMA de KUTTA-JOUKOWSKI (Batch 406 - (6.4.26))
(1910) (Chorin & Maraden 53)

Seja o escoamento potencial incompressível, exterior à região B. Seja a velocidade no infinito dada pelo vetor $\vec{U} = [A_x, A_y]^T$ (constante).

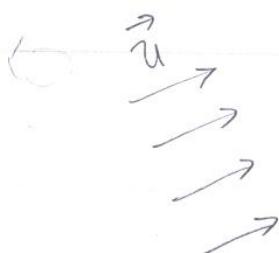
A força exercida sobre o obstáculo B é dada por

$$F = [X \ Y]^T = -\rho K \|\vec{U}\| \vec{n}, \text{ onde}$$

\vec{n} é o vetor unitário, normal a $\vec{U} = [A_x \ A_y]^T$, e K é



a circulação em torno de B.



A demonstração faz uso da rei de Laurent para o potencial complexo, em conjunção com o Teorema de Blasius e o Teorema de Cauchy. (vde Batchelor ou Chorin & Marsden).

Note que não há uma componente da força no sentido contrário ao escoamento, este é o chamado PARADOXO de D'ALEMBERT. O paradoxo se dá em face de termos ignorados a viscosidade. Esse paradoxo ainda é mais surpreendente em 3D. Neste caso não temos força de arrasto, nem força de sustentação! (Chorin & Marsden 60, Landau & Lifschitz 34)

A engenharia pode tirar proveito desse paradoxo no sentido que, quanto menor a camada límite em torno da asa, e quanto maior a circulação gerada, melhor para o aerofólio.

Neste curso não entraremos no tópico de aerofólios. No entanto aproveitamos para dar 2 exemplos dos chamados aerofólios de Joukowski:

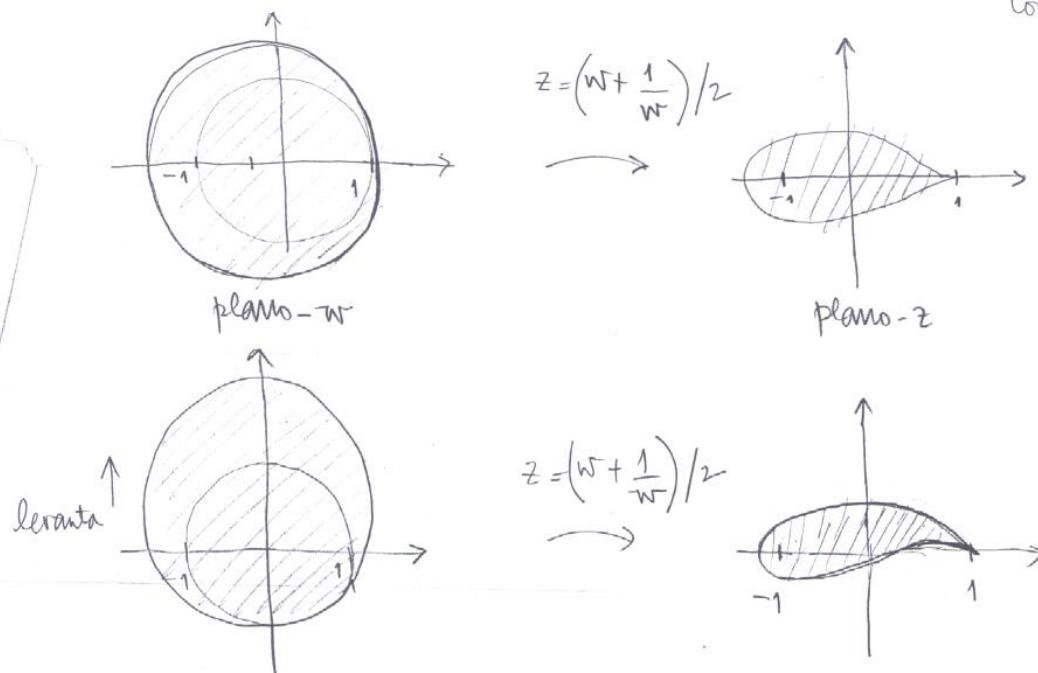
B446

Considere a transformação conforme

$$z = w + \frac{R^2}{w},$$

conhecida como a transformação de Joukowski.

Sejam as seguintes geometrias: (Batch 445, Ablowitz & Fokas 405)
Complex Variables



ESCOAMENTOS com ROTAÇÃO (ROTACIONAIS)

DF77

0.1 Variáveis complexas e dinâmica dos fluidos

Exemplo 3: Vamos estudar o potencial complexo *(que já foi usado no caso do cilindro com circulação)*

$$\Phi(z) = -i a \log(z), \quad (0.1)$$

onde $\log(x) = \ln(x)$, para $x > 0$. Vamos visualizar o escoamento através da função de corrente, usando coordenadas polares ($z = re^{i\theta}$):

$$\psi = -a \log(r).$$

As linhas de corrente, $\psi = -a \log(r) = \text{constante}$, são circulares. O campo de velocidades é dado por

$$\frac{d\Phi}{dz} = -i \frac{a}{z} = -\frac{a}{r}(\sin(\theta) + i \cos(\theta)).$$

A visualização é apresentada na figura 0.1 e o potencial complexo representa um vórtice em $z = 0$. Esse escoamento não é mais irrotacional mas, ainda assim, pode ser modelado usando-se variáveis complexas. Note que o potencial complexo tem uma singularidade em $z = 0$ e por isso a velocidade não é definida nesse ponto; ela tem um polo em $z = 0$.

Alguns exercícios são recomendados. Calcule a circulação sobre curvas circulares Γ , calcule a velocidade angular da água nesse redemoinho, e identifique a dependência com respeito ao parâmetro a , chamado de intensidade do vórtice.

Exemplo 4: Vamos analisar um cilindro de raio R na presença de um vórtice, posicionado em $z = z_0$, $|z_0| > R$. O potencial é dado pelo Teorema do Círculo.

Note que o potencial livre é dado por $f(z) = -i a \log(z - z_0)$. Esta função é diferenciável em $|z| \leq R$. A singularidade de f está fora do disco. Veja a figura 0.2. Temos

$$\boxed{\Phi(z) = -i a \log(z - z_0) + i a \log\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_0\right).} \quad (0.2)$$

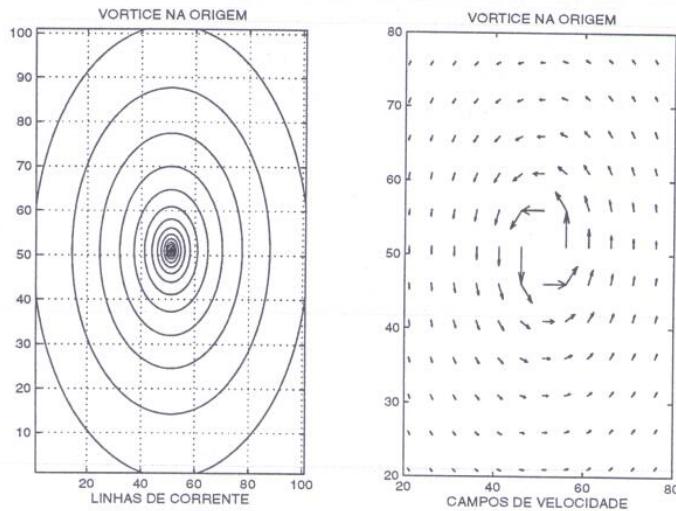


Figure 0.1: Linhas de corrente para um vórtice localizado na origem.

Para entender melhor o que acontece quando usamos o Teorema do Círculo, vamos reescrever o potencial acima na forma:

$$\Phi(z) = -i a \log(z - z_0) + i a \log\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}\right) - i a \log(z) + i a \log(-\bar{z}_0).$$

~~constante~~

O último termo é uma constante e por isso não afeta o campo de velocidades. Podemos ignorá-lo. Os outros representam 3 vórtices, sendo 2 fictícios: um na origem com intensidade a , e outro em $\bar{z}_0^* = R^2/\bar{z}_0$ com intensidade $(-a)$ (girando no sentido horário). Os 2 vórtices fictícios (i.e., dentro do cilindro) fazem com que a borda do cilindro coincida com a linha de corrente $\psi = 0$. Em outras palavras, se tirarmos o cilindro e colocarmos esses 3 vórtices, vamos ter as mesmas linhas de corrente fora do círculo de raio R , mas teremos um escoamento dentro do círculo que agora representa uma região com água também.

Há vários exercícios a serem feitos. ~~Eles estão disponíveis online no link~~. Fica aqui uma sugestão: calcular a velocidade angular do vórtice em z_0 em torno do cilindro. A dica é usar a expressão com 3 vórtices e desprezar o efeito do potencial para o vórtice em z_0 . Em outras palavras, deve-se

DF781

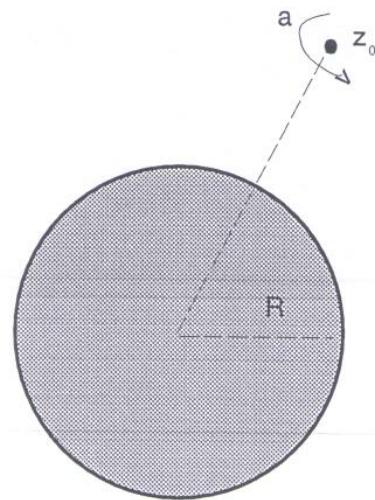


Figure 0.2: Cilindro de raio R na presença de um vórtice.

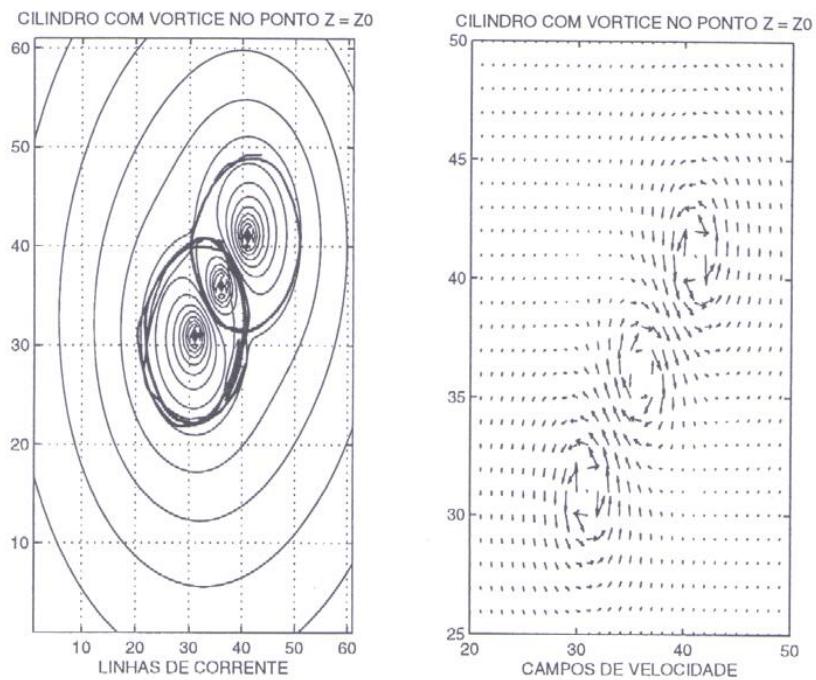


Figure 0.3: Cilindro de raio R na presença de um vórtice em z_0 e outros 2 fictícios.

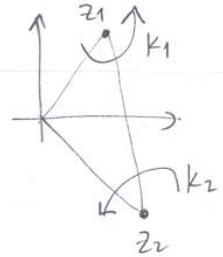
usar o potencial modificado

$$\tilde{\Phi}(z) = \text{real} \log \left(z - \frac{R^2}{z_0} \right) - i \text{imag} \log(z)$$

Fazendo isso pois um vórtice não induz uma velocidade sobre si mesmo. Vamos primeiro um caso mais simples.

Consideramos dois vórtices ou seja

$$w(z) = -ik_1 \log(z-z_1) - ik_2 \log(z-z_2)$$



Queremos agora estudar o movimento que um vórtice induz sobre o outro. Definimos a velocidade do vórtice j como sendo

$$\dot{\bar{z}}_j = \frac{d\bar{z}_j}{dt} = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{d}{dz} \left\{ w(z) + ik_j \log(z - z_j) \right\}$$

ou seja

$$\dot{\bar{z}}_j = \frac{dx}{dt}(x_j, y_j) - i \frac{dy}{dt}(x_j, y_j)$$

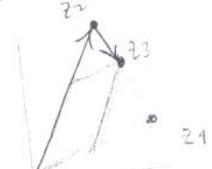
pois o regime é estacionário e não depende do tempo explicitamente.

Estudemos a dinâmica do centro de vorticidade. Por analogia com a definição de centro de massa escrevemos para o centro de vorticidade

$$\bar{S} = \left(\frac{k_1}{k_1+k_2} \right) z_1 + \left(\frac{k_2}{k_1+k_2} \right) z_2, \text{ quando } k_1+k_2 \neq 0.$$

$$\dot{\bar{z}}_1 = \left. \frac{d}{dt} \left\{ -i k_2 \log(z-z_2) \right\} \right|_{z=z_1} = \frac{-i k_2}{z_1 - z_2}$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = -\frac{i k_1}{z_2 - z_1}$$

$$\text{logo } (k_1+k_2) \frac{d\bar{S}}{dt} = -\frac{i k_1 k_2}{z_1 - z_2} + i \frac{k_1 k_2}{z_1 - z_2} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{S} = z_3 = \text{constante}}$$


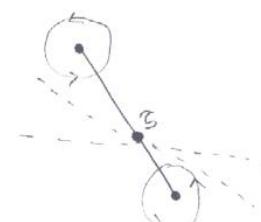
Calculemos agora

$$\frac{d}{dt} |z_1 - z_2|^2 = \frac{d}{dt} [(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)] =$$

$$= [(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\dot{\bar{z}}_1 - \dot{\bar{z}}_2)] =$$

$$= \frac{i(k_2 + k_1)}{(z_1 - z_2)} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - (z_1 - z_2) \frac{i(k_2 + k_1)}{(z_1 - z_2)} = 0$$

\Rightarrow vórtices giram em torno de $\bar{S} = z_3$.



- Qual a velocidade angular dos vórtices em torno de $\zeta = z_3$?

Já vimos que

$$\overline{\frac{d}{dt}(z_1 - z_2)} = \frac{-ik_2}{z_1 - z_2} + \frac{ik_1}{z_2 - z_1}$$

$$\overline{\frac{d}{dt}(z_1 - z_2)} = -i \frac{(k_1 + k_2)}{(z_1 - z_2)}, \text{ EDO para a diferença}$$

Diante face os resultados anteriores podemos escrever que

$$z_1 - z_2 = r e^{i\theta}, \quad r = \text{constante},$$

logo

$$\overline{\left(i r \frac{d\theta}{dt} e^{i\theta} \right)} = -i \frac{(k_1 + k_2)}{r e^{i\theta}}$$

$$-ir e^{-i\theta} \frac{d\theta}{dt} = -i \frac{(k_1 + k_2)}{r e^{i\theta}}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{k_1 + k_2}{r^2} = \frac{k_1 + k_2}{|z_1 - z_2|^2}}.$$

velocidade angular constante,

- Vamos agora o caso $k_1 + k_2 = 0$ ou seja $k_1 = K = -k_2$,

Neste caso não podemos definir o centro de vorticidade. No entanto ainda temos que:

$$\dot{\bar{z}}_1 = \frac{iK}{z_1 - z_2}, \quad \dot{\bar{z}}_2 = \frac{-iK}{z_2 - z_1}, \quad \frac{d}{dt}|z_1 - z_2| = 0,$$

O cálculo da velocidade é o mesmo, sendo que

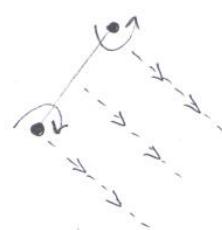
DF82

$$\frac{dt}{dt} = \frac{k_1 + k_2}{|z_1 - z_2|^2} = 0$$

Note que neste caso os 2 vértices tem a mesma velocidade

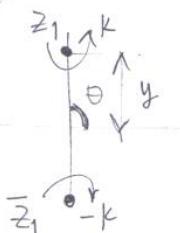
complexa

$$\frac{\dot{z}_1}{\bar{z}_1} = \frac{\dot{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{iK}{z_1 - z_2} = \frac{K}{r} e^{-i(\theta - \frac{\pi}{2})}$$



Quando

$$\frac{iK}{z_1 - \bar{z}_1} = \frac{ik}{2iy_1}$$



temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e a velocidade

é real pura

$$\left[\frac{K}{2y} \right]$$

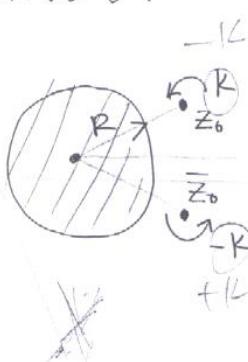
X

Voltando ao problema do cilindro temos que o vértice, em z_0 , descreve órbitas circulares com velocidade angular constante

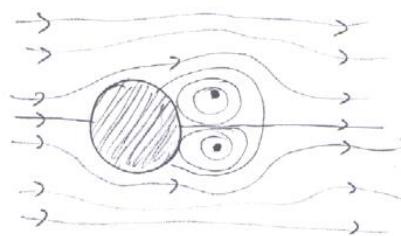
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = -\frac{aR^2}{r^2} \frac{1}{(R^2 - r^2)}, \text{ onde } z_0 = re^{i\theta}. \quad X$$

K=a

Podemos também examinar 2 vértices na presença de um cilindro.

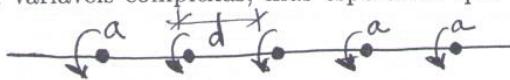


Podemos fazer os vértices ficarem parados?
Quais são os vértices fictícios dentro de cilindros?



Notas CMS, FD 40V
ângulo max = 30°

Exemplo 5: Estudemos agora um exemplo mais complexo. Este exemplo exige ainda mais destreza em variáveis complexas, mas esperamos que isto sirva de estímulo para o leitor.



Considere uma linha infinita de vórtices da mesma intensidade a . Veja a figura

Este tipo de configuração aparece em escoamentos reais (*An Album of Fluid Motion* (foto no. 98), Van Dyke). Usando a nossa experiência em exemplos anteriores, vamos tentar escrever o potencial complexo para esta nova configuração de vórtices. Que tal

$$\text{"}\Phi(z)\text{"} = -i a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(z - nd)?$$

Infelizmente esta expressão não faz sentido. Por isso já colocamos as aspas.

Esta série não converge, apesar de formalmente representar uma linha infinita de vórtices. Vamos tentar consertar a situação. O ponto de partida é reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$\text{"}\Phi(z)\text{"} = -i a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 - \frac{z}{nd}\right) + \log\left(1 + \frac{z}{nd}\right) + \log(-n^2 d^2) \right) - i a \log(z).$$

Para iri fizemos

$$-ia \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(z - nd) = -ia \log z - ia \sum_{n=1}^{\infty} \log(z^2 - (nd)^2) =$$

$$= -ia \log z - ia \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 - \left(\frac{z}{nd}\right)^2\right) + \cancel{\log(-n^2 d^2)} \right]$$

descarta.

O último termo, dentro do somatório, é uma constante e por isso pode ser jogado fora sem interferir no campo de velocidades (dado por $d\Phi/dz$). Agora podemos escrever uma série que matematicamente faz sentido:

$$\Phi(z) = -i a \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\log\left(1 - \frac{z^2}{n^2 d^2}\right) \right) - i a \log(z).$$

Ou ainda

$$\Phi(z) = -i a \log \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2 d^2} \right) \right\}.$$

Fizemos a troca do limite pelo ~~produto~~ baseado no seguinte resultado, proveniente da aplicação do Teorema de Fatoração de Weierstrass (Conway; Lins Neto):

$$\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 d^2} \right),$$

onde o produto converge uniformemente em compactos contidos no plano complexo. Em face a este resultado, escrevemos o potencial complexo para uma linha com infinitos vórtices de intensidade a :

$$\Phi(z) = -i a \log \left(\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \right). \quad (0.3)$$

Uma boa verificação é fazer z se aproximar de $z_0 = nd$. Quando isto acontece

$$\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \approx \frac{\pi}{d}(z - nd)$$

e

$$\Phi(z) \approx -i a \log(z - nd) - i a \log\left(\frac{\pi}{d}\right).$$

O segundo termo é uma constante e o comportamento, perto de um vórtice localizado em $z_0 = nd$, é o desejado.

O campo de velocidades é dado por

$$\frac{d\Phi}{dz} = -i \frac{a\pi}{d} \cot\left(\frac{\pi z}{d}\right) = u - i v.$$

Temos um número infinito de pontos de estagnação (pontos localizados em $z = (2n + 1)d/2$, onde $u - i v = 0$). A função de corrente é dada por

$$\psi(x, y) = -\frac{a}{2} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\cosh\left(\frac{2\pi y}{d}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right) \right]$$

e as linhas de corrente estão esboçadas na figura 0.5. Podemos imaginar que temos uma linha com “liquidificadores” idênticos, situados em $z = nd$. Na parte de cima os “liquidificadores” produzem uma correnteza para a esquerda, enquanto que na parte de baixo uma correnteza para a direita. O esboço das linhas de corrente está de acordo com a nossa intuição. Uma partícula passando perto de um “liquidificador” vai tender a passar no meio de 2 “liquidificadores”, puxada pelo redemoinho do primeiro. Mas antes que isso aconteça, o efeito do “liquidificador” vizinho faz com que a partícula seja atirada para fora do redemoinho do primeiro “liquidificador”, e ela continuará com essa trajetória ondulada.

Exemplo 6: Neste último exemplo vamos extender o exemplo 5 para uma distribuição contínua de vórtices. A distribuição contínua é tal que a intensidade total, sobre um intervalo de comprimento $d = 2\pi$, continua sendo a . A intensidade de cada vórtice é $(a ds/2\pi)$, onde ds representa um infinitésimo de comprimento de arco. Para formular o potencial complexo, temos que somar o efeito de todos os vórtices desse intervalo. A “soma” é dada pela integral

$$\Phi(z) = \frac{-i a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left(\sin\left(\frac{z-s}{2}\right) \right) ds,$$

para valores de z fora do eixo real. Esse potencial complexo representa uma linha contínua, infinita, de vórtices. A essa linha se dá o nome de folha de vorticidade.

A verificação de diversas propriedades desse potencial depende de muita boa

análise complexa. (*)

As linhas de corrente estão representadas na figura 0.6;

temos um escoamento cisalhante. Vários problemas de pesquisa (computacionais

em sua maioria) surgiram a partir desta formulação integral. (problemas ligados

à instabilidade da interface)

6

(*) Por exemplo mostrar, e calcular, o salto no campo das velocidades ao cruzarmos a interface $y=0$. Esta é uma aplicação da fórmula de Plemelj.

DF85A

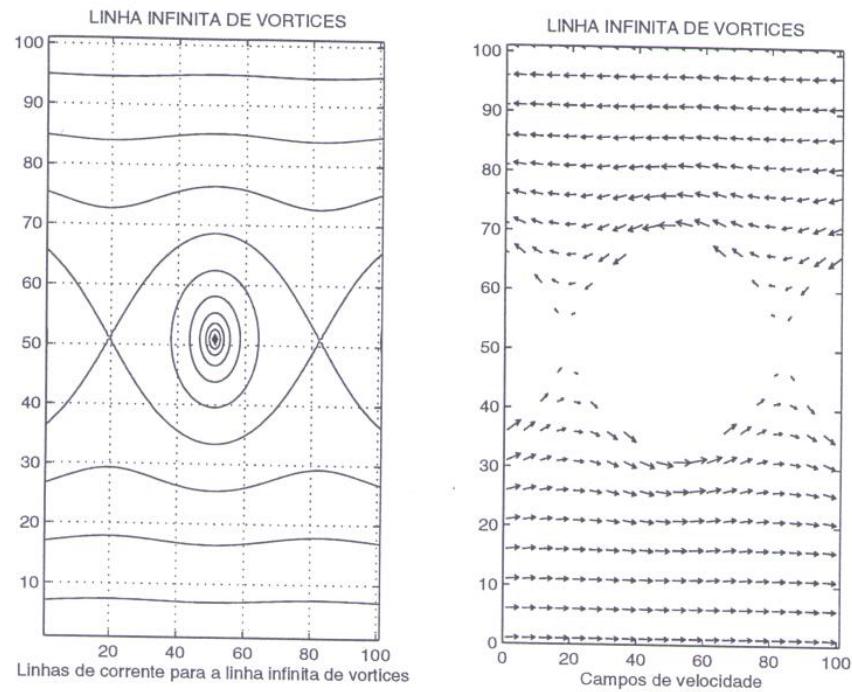


Figure 0.5: Linhas de corrente para a linha infinita de vórtices.

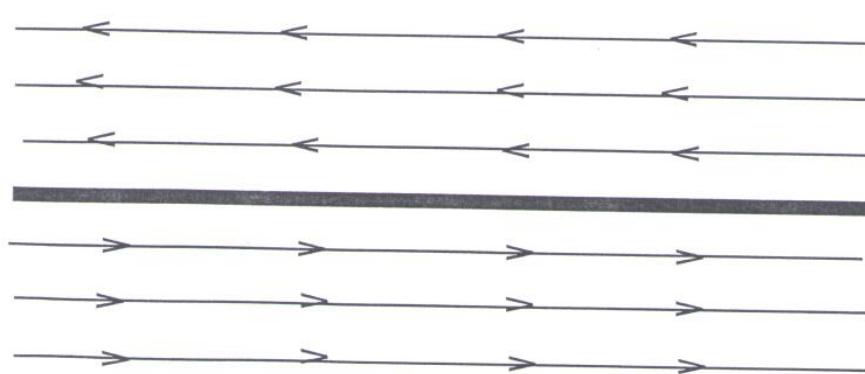


Figure 0.6: Linhas de corrente para uma folha de vorticidade.

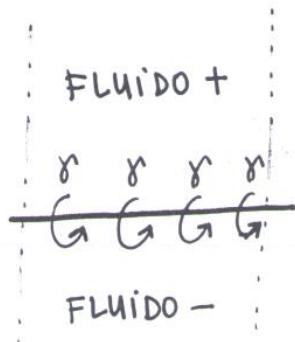
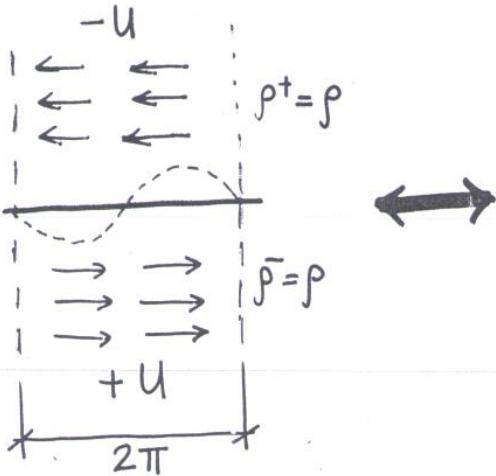
UM EXÉRCITO de UM PROBLEMA em "INSTABILIDADES"

DF86

• INSTABILIDADE DE INTERFACES •

Frazer & Reid

Hydrodynamic Stability
Cambridge Univ. Press 1981



Interface — é modelada por uma folha de vorticidade (vortex sheet) :

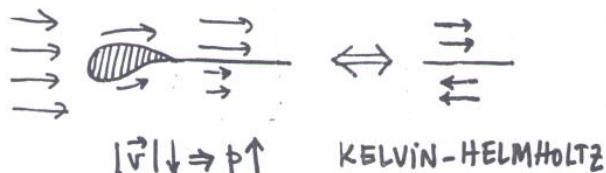
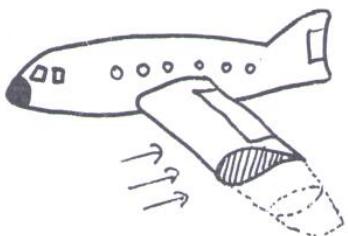
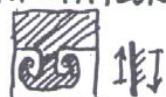
$$\text{vorticidade} = \nabla \times (U, V) = \gamma \delta(\rightarrow)$$

↑ intensidade da folha de vorticidade

FLUIDO = Incompressível, Invíscido .

RAYLEIGH-TAYLOR

FLOW = Irracional, a menos da interface



KELVIN-HELMHOLTZ

Moore, DW, The spontaneous appearance of a singularity
in the shape of an evolving vortex sheet, Proc. R. Soc.
London, A365, 105, 1979

DF86A

Krasny, R, A study of singularity formation in a
vortex sheet by the point vortex method
approximation, J. Fluid Mechanics, 167,
pp. 65, 1986

Krasny, R, Demingularization of periodic vortex sheet
roll-up, J. Comp. Physics, 65, pp. 292-313,
1986

(*) Hou, T, Lowengrub, J and Shelley M, Removing the stiffness from interfacial
flows with Surface Tension, J. Comp. Physics, 114,
pp. 312-338, 1994

Balcer, G, and Nachbin A, Stable Methods for vortex Sheet
Motion in the Presence of Surface Tension /
SIAM J. Scient. Comp. (SISC), v19, no.5, pp. 1737-1766,
1998

(*) Hou, TY, Lowengrub, J and Shelley M, Boundary integral methods
for multiphase problems in fluid dynamics and
materials science, J. Comp. Physics, 169, No.2,
pp 302-362, 2001.

(*) <http://www.acm.caltech.edu/~hou>

and can be a smoothing influence. To validate that redistribution does not lead to harmful effects on the results, we have used equal arclength as the criterion for redistribution. This allows us to compare our results directly with the results of the method of Hou *et. al.* [18]. Pointwise comparison shows that the results for 512 markers agree to about 10^{-9} , and is about the level of accuracy for that resolution. We have experimented with other redistribution criteria, and found better ones than equal arclength, but we plan to publish those results later.

2. Equations of motion. We consider the two-dimensional motion of an interface separating two immiscible, incompressible and inviscid fluids. The interface stretches periodically in either direction, and we choose the x -axis to be aligned with the mean level of the interface. We choose the length-scale so that the interface is 2π -periodic; thus we may parametrize the interface as the curve $\{C : z(e, t) = x(e, t) + i y(e, t), 0 \leq e \leq 2\pi\}$ with the property $z(e + 2\pi, t) = 2\pi + z(e, t)$. We assume that there is no initial vorticity in the fluid flow away from the interface. Due to the presence of surface tension on the interface, vorticity will, in general, be created at the interface but not in the interior of the fluid layers. The interface may be represented by a vortex sheet whose strength will be affected by the presence of surface tension. We allow the fluids above and below the interface to move with different horizontal speeds far from the interface. We select a frame of reference in which these horizontal speeds are $\mp U$ above and below the interface respectively. Consequently, the vortex sheet strength will have a mean value, $2U$.

Since our interest is on the effect of surface tension on the Kelvin-Helmholtz instability, we choose the densities of both fluids to be the same constant value, ρ , throughout the flow region. So the Atwood number [8, 26] is zero, and the effect of gravity is absent.

We follow previous researchers [8, 26] in expressing the complex velocity potential, $\Phi = \phi + i\psi$, as a boundary integral involving the circulation variable, $\Gamma(e, t)$. The potential function ϕ is discontinuous across the interface. We denote its average value by $\bar{\phi}$ so that along C we have $\phi_1(e, t) = \bar{\phi}(e, t) + 0.5\Gamma(e, t)$ and $\phi_2(e, t) = \bar{\phi}(e, t) - 0.5\Gamma(e, t)$. We have introduced a subscript 1 or 2 to refer to quantities just below or above the interface respectively. The average complex velocity potential along the interface is given by

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Psi(z(e, t)) &= \bar{\phi}((x(e, t), y(e, t))) + i\psi(x(e, t), y(e, t)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma(e', t) \ln \left[\sin \left(\frac{z(e, t) - z(e', t)}{2} \right) \right] de'. \end{aligned}$$

Here we have introduced the unnormalized vortex sheet strength,

$$(2.2) \quad \gamma(e, t) \equiv \Gamma_e(e, t) \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial e}(e, t). \quad \text{Normalized } \frac{\partial \Gamma}{\partial e} \left(\frac{\partial z}{\partial e} \right)^{-1}$$

Kinematic considerations require points on the interface to move with the same normal component of velocity as the fluid. Tangential components of the fluids may jump on either side of the interface, so there is latitude in the specification of the tangential speed of points on the interface. Normally, the average speed is chosen, but there are situations where weighted averages are better [6, 7, 8]. In this work, we choose the average speed. Thus the velocity for each Lagrangian marker, labelled by e , on the interface, is given by differentiating equation (2.1):

$$(2.3) \quad \frac{\partial z^*}{\partial t}(e, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma(e', t) \cot \left(\frac{z(e, t) - z(e', t)}{2} \right) de' \quad \approx \text{Euler of d'Alambert discontinuous.}$$

$$\begin{aligned} G &= \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = 2U \\ &= \iint w dA \quad \text{Dirac intended} \end{aligned}$$

"Stable Methods for Vortex Sheet Motion in the presence of Surface Tension", accepted in SIAM Journal of Scientific Computing (1988)

WE19, no. 5
pp. 1737-1766

where the principal-value of the integral must be taken.

Dynamical considerations require that the pressure jump $(p_2 - p_1)$ across C is balanced by the interfacial force due to surface tension:

$$(2.4) \quad p_2 - p_1 = T K(e, t) = T \frac{x_e y_{ee} - x_{ee} y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}. \quad \text{Laplace-Young law}$$

$K(e, t)$ stands for the curvature of the interface at the point $z(e, t)$ and T is the surface tension coefficient. Subscripts indicate partial differentiation. By subtracting Bernoulli's equation on either side of the interface, we are led directly to the evolution equation for the circulation variable:

$$(2.5) \quad \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(e, t) = \frac{T}{\rho} K(e, t) \right]$$

In the absence of surface tension, Γ is constant in time, and (2.3) is the familiar Birkhoff-Rott equation for vortex sheet motion.

The evolution equations have certain properties. If the functions $z(e, t) - e$ and $\Gamma(e, t) - 2Ue$ are periodic initially, they will remain periodic [26]. The total circulation along C (i.e. $\Gamma(2\pi, t) - \Gamma(0, t)$) is conserved even in the presence of surface tension [26]. Further, the perturbed energy is a constant of motion [26].

We gain further insight into some general properties of the motion by considering the consequences of perturbations to a perfectly flat interface. When $z(e, t) = e$ and $\Gamma(e, t) = 2Ue$, the interface is flat and comprises a steady-state solution to (2.3, 2.5). Set

$$(2.6a) \quad \Gamma(e, t) = 2U \left(e + \varepsilon \hat{\Gamma}(e, t) \right),$$

$$(2.6b) \quad x(e, t) = e + \varepsilon \hat{x}(e, t),$$

$$(2.6c) \quad y(e, t) = \varepsilon \hat{y}(e, t),$$

where we regard ε as a measure of the size of the perturbation. Note that we have already assumed a length scale of 2π in our formulation, and now we have scaled the perturbed circulation by $2U$. The linearized system of differential equations is obtained by expanding the right hand sides of (2.3, 2.5) and retaining terms up to $O(\varepsilon)$ only:

$$(2.7a) \quad \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial t}(e, t) = \frac{T}{2U\rho} \hat{y}_{ee}(e, t),$$

$$(2.7b) \quad \frac{\partial \hat{x}}{\partial t}(e, t) = - \frac{U}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{y}(e, t) - \hat{y}(e', t)}{\sin^2((e - e')/2)} de',$$

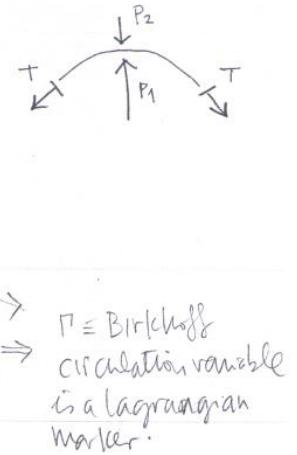
$$(2.7c) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(e, t) = & - \frac{U}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\hat{x}(e, t) - \hat{x}(e', t)}{\sin^2((e - e')/2)} de' \right. \\ & \left. - \int_0^{2\pi} 2\hat{\Gamma}_e(e', t) \cot\left(\frac{e - e'}{2}\right) de' \right\}. \end{aligned}$$

Since our interest is in periodic solutions, we may express the perturbed quantities in Fourier series with time-dependent amplitudes. For this system, the even and odd modes uncouple. For the even modes, there is a solution of the following form:

$$(2.8a) \quad \hat{\Gamma}(e, t) = A_1(t) \cos(ke),$$

$$(2.8b) \quad \hat{x}(e, t) = A_2(t) \cos(ke),$$

$$(2.8c) \quad \hat{y}(e, t) = A_3(t) \cos(ke).$$



estado estacionário.

Substitution into (2.7) leads to a system of ordinary differential equations for the time-dependent amplitudes. The integrals are computed by writing them as closed integrals on the unit circle in the complex plane, and by employing the calculus of residues. In particular,

$$(2.9a) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(ke') \cot\left(\frac{e-e'}{2}\right) de' = \begin{cases} -\cos(ke), & \text{for } k > 0 \\ 0, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

$$(2.9b) \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(ke) - \cos(ke')}{\sin^2((e-e')/2)} de' = k \cos(ke).$$

Thus we obtain the linear system

$$(2.10) \quad \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k^2 T / (2U\rho) \\ 0 & 0 & -Uk \\ Uk & -Uk & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

which has solutions,

$$(2.11a) \quad A_1(t) = \frac{T k^2}{2\rho} C e^{\lambda t},$$

$$(2.11b) \quad A_2(t) = U^2 k C e^{\lambda t},$$

$$(2.11c) \quad A_3(t) = -U\lambda C e^{\lambda t}.$$

where C is an arbitrary constant. These solutions are the eigenvectors of the matrix in (2.10) with λ as an eigenvalue. The three possible values for λ are:

$$(2.12a) \quad \lambda(k) = 0,$$

$$(2.12b) \quad \lambda(k) = \pm \left[U^2 k^2 - \frac{T}{2\rho} k^3 \right]^{1/2}.$$

The result, $\lambda(k) = 0$, indicates the presence of perturbations that leave the interface undeformed. In effect, a new parametrization has been introduced by the perturbation. Such behavior is typical of Lagrangian methods [4]. The case, $k = 0$, is special in that all values of $\lambda = 0$, and the eigenvectors are just arbitrary uniform shifts in the unknowns. The same relation (2.12) holds for odd modes containing $\sin(ke)$. The general solution is then a linear superposition of both odd and even modes over all positive integer values of k . The result (2.12b) is a classic result, and is normally derived from Euler's equations; see [15].

The eigenvalues contain important information since they give the growth rates for the perturbation. In the absence of surface tension, $T = 0$, we have $\lambda = \pm U k$. The modes with highest k , or smallest wavelength, grow the fastest. This leads to ill-posed motion and in the full nonlinear behavior causes a curvature singularity to form in finite time. However, the presence of surface tension ensures that the high modes have only imaginary growth rates; the modes merely oscillate. The linearly stable modes are identified by $k \geq k_c = 2\rho U^2 / T$. The difficulty is in understanding the consequences of the presence of surface tension on the full nonlinear behavior. At this stage, numerical methods which follow the motion reliably are needed to gain insight into the possible nonlinear behavior. In particular, numerical methods must capture the salient features of the growth rates (2.12b).

Transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

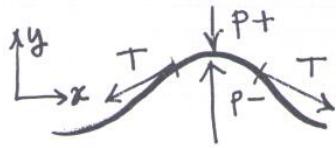
$$\mathcal{H}[f'](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(y)}{(x-y)^2} dy$$

Formulação: Eg. Integro-Diferencial

DF90

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(e,t) = \frac{T}{\rho} K(e,t) \\ \frac{\partial z^*}{\partial t}(e,t) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial e}(e',t) \cot\left(\frac{z(e,t) - z(e',t)}{2}\right) de' \end{array} \right.$$

↓ P Cauchy



$\Gamma(e,t)$ = circulação acumulada, $\frac{\partial \Gamma}{\partial e} = \gamma$

$z(e,t) = x(e,t) + i y(e,t)$ posição da folha
 $e \in [0, 2\pi]$ marcador Lagrangeano.

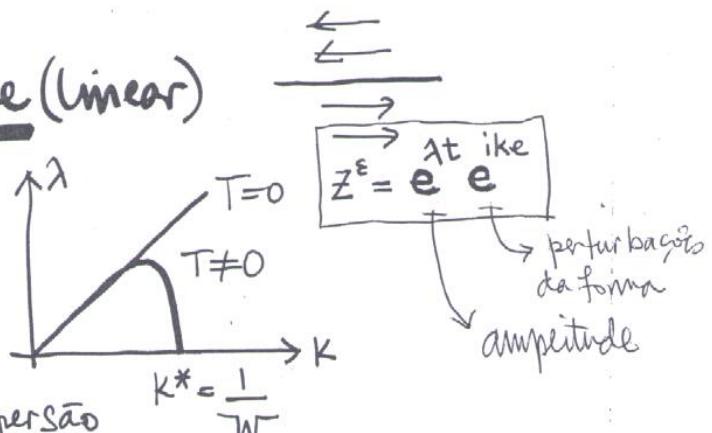
$$K(e,t) = \frac{x_e y_{ee} - X_{ee} y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} = \text{CURVATURA da folha.}$$

Análise da Estabilidade (linear)

$$\lambda = UK \sqrt{1 - W K}$$

$$W = \frac{T}{2\rho U^2}, \# \text{Weber}$$

$W \neq 0$, regularização via dispersão
 $\lambda \in \mathbb{Im}$

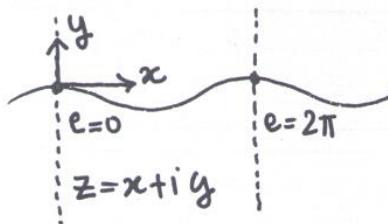


$$K^* = \frac{1}{W}$$

TEORIA LINEAR:

$$z(e, t) = e + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{z}_k e^{\lambda t} e^{ik\frac{e}{\epsilon}}$$

\rightarrow (vamos considerar que temos apenas $k=0$ (prob. linear))



Relação de Dispersão:

$$\lambda(k) = \pm k$$

com $U=1$, $W=0$

$$z(e, 0) = e + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{z}_k e^{ik\frac{e}{\epsilon}},$$

$$\hat{z}_k = C e^{-\beta k}$$

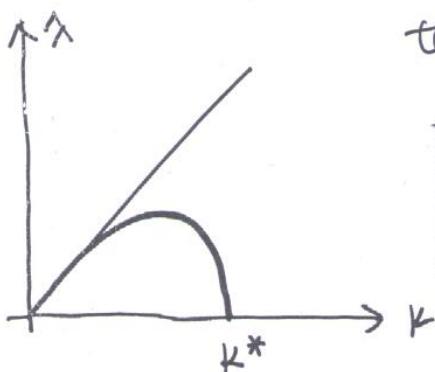
Dado Inicial é ANALÍTICO.

$$z(e, t) = e + \sum_{k=0}^{\infty} C e^{-k(\beta - t)} e^{ik\frac{e}{\epsilon}}$$

Perda de analiticidade:

tempo crítico $t_c = \beta$ (nem converge)

Não-linearidade não restitue regularidade!



ESTUDO da SINGULARIDADE

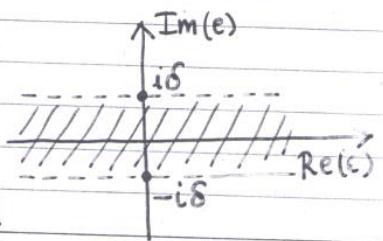
— interface : $Z(\epsilon, t) = \epsilon + X(\epsilon, t) + i Y(\epsilon, t)$

$$p(\epsilon, t) = p(\epsilon + 2\pi, t)$$

— Continuação analítica de $p(\epsilon, t)$ no plano complexo para $\epsilon \in \mathbb{C}$.

— Espectro de Fourier para $K \gg 1$:

$$|\hat{P}_K| \sim K^{-\frac{1}{2}(1+\beta(t)) - K\delta(t)}$$



$2\delta(t) = \text{Largura da região de analiticidade}$

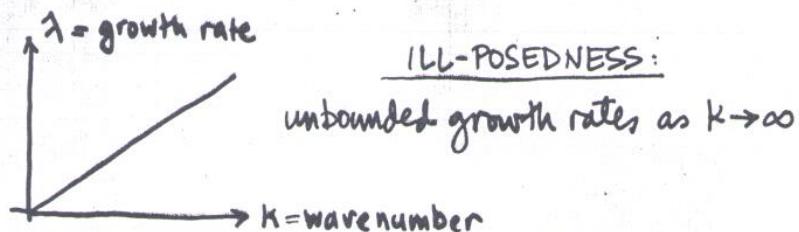
$\beta(t) = \text{ordem do ponto de ramificação mais próximo.}$

indica regularidade da solução

EX: $1 < \beta < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ derivada ok!} \\ \text{curvatura explode!} \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Frasny, JFM (86); Shelley, JFM (92)} \\ \text{Baker, Caflisch \& Siegel, JFM (93)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} T=0 \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \delta(t_c)=0 \end{array}$$

$$\text{Baker \& Nachbin } T \neq 0 \quad \beta = 1/3, \quad \delta(t) \xrightarrow{?} 0$$



76

R. Krasny 1986

16 digits + filter

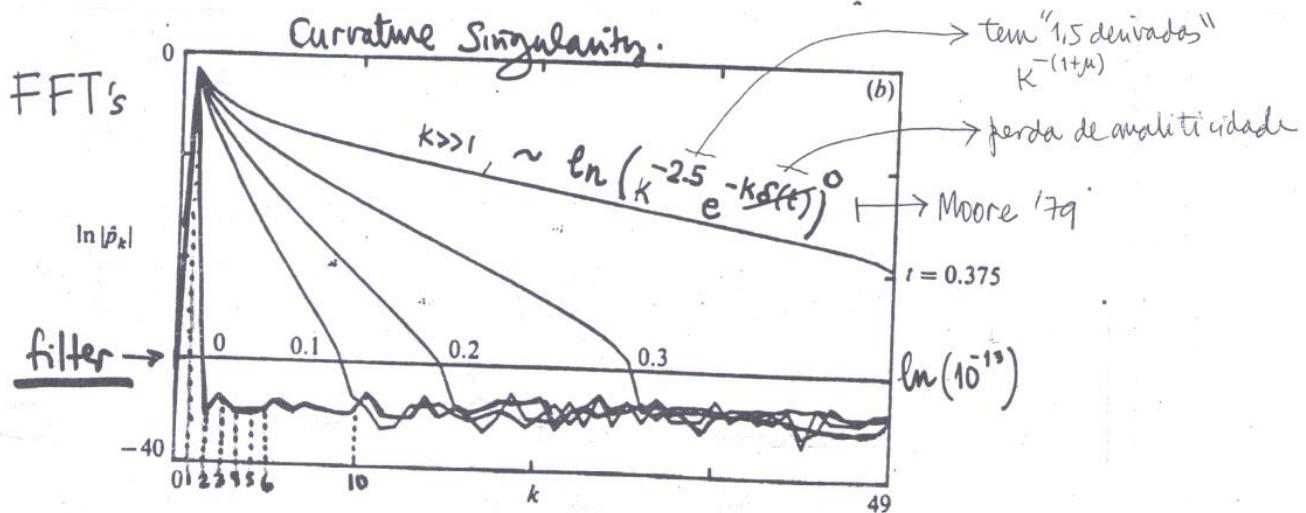
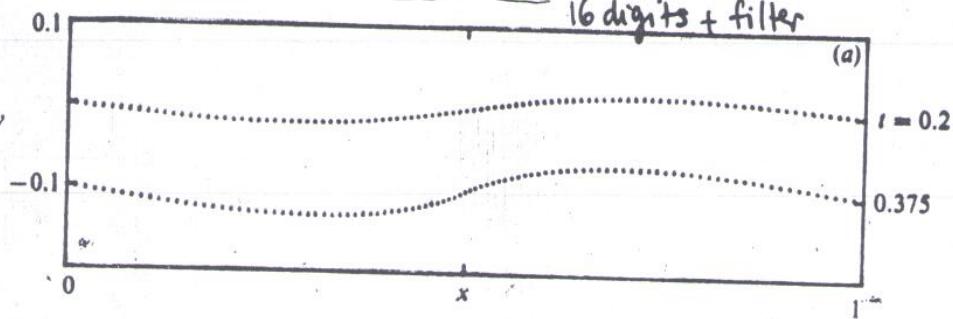


FIGURE 5. Double-precision (16 digit) calculation with the filter level set at 10^{-13} (the horizontal line in (b)). This calculation used $N = 100$ and the same time stepping as before. (a) point-vortex positions; (b) log-linear plot of the Fourier coefficients' (2.2) amplitudes versus wavenumber. Compare this with the unfiltered and the higher precision calculations in figures 3 and 4.

filter prevents roundoff error from generating spurious irregular motion of markers.

ORTEK
DUBB
METHOD

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{-1}{2} \int_0^1 \frac{\sinh 2\pi(y-\tilde{y})}{\cosh 2\pi(y-\tilde{y}) - \cos 2\pi(x-\tilde{x}) + \delta^2} d\tilde{y} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin 2\pi(x-\tilde{x})}{\cosh 2\pi(y-\tilde{y}) - \cos 2\pi(x-\tilde{x}) + \delta^2} d\tilde{y} \end{cases}$$

DF93

ROLL-UP of the INTERFACE (Krasny)
J.C.P. 1986

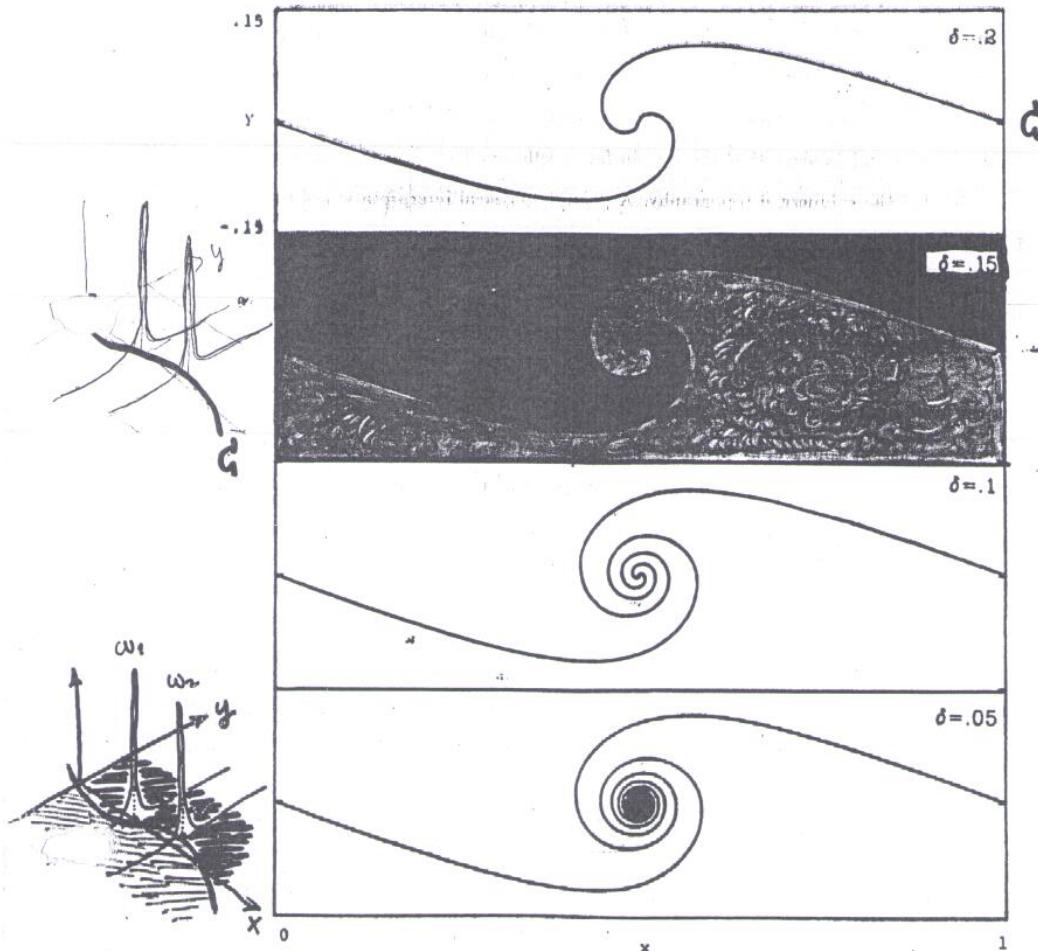
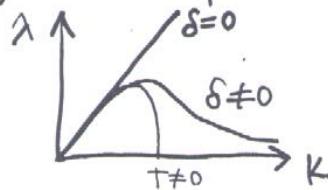


FIG. 5. Solution of the δ equations (1), (2) at $t = 1.0$ using $\delta = 0.2, 0.15, 0.1, 0.05$.

δ = desingularization parameter (singular integrals)

Sol EIPS
Nc/1024 M=128
T=9.12sec



$$\lambda^2 = \frac{k(1-e^{-k \cosh^{-1}(1+\delta^2)})e^{-k \cosh^{-1}(1+\delta^2)}}{48(2+\delta^2)^{1/2}}$$

$$\lambda = \lambda(k; \delta)$$

DF14
(CM62)

Aí agora não paramos para ver qual é a vorticidade associada a um vórtice puntual. Temos que

$$\text{Lamb pg 63 } u = -\nabla_y \psi, v = \nabla_x \psi$$

$$u = \nabla_y \psi, v = -\nabla_x \psi \quad \text{e} \quad w = -u_y + v_x.$$

Logo $\Delta \psi = -w$. Esta é uma equação de Poisson,

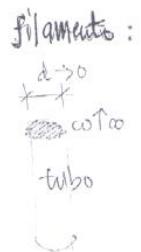
Para um vórtice de intensidade $\frac{k}{2\pi}$ localizado em z_0

temos

$$\psi(r) = -\frac{k}{2\pi} \ln r = -\frac{k}{2\pi} \log |z - z_0|$$

$$\Delta \psi = -\frac{k}{2\pi} \Delta \ln r = -k \delta(x, y; x_0, y_0) = -w$$

Logo $w = k \delta(x, y; x_0, y_0)$. A vorticidade



é uma função delta de Dirac. No caso da folha de vorticidade temos uma função delta de Dirac com suporte sobre a interface. Note então que usando a função de Green para a equação de Laplace temos que (formalmente invertendo o Laplaciano)

$$\psi(x) = - \int \omega(x') G(x-x') dx'$$

onde $G(x-x') = \frac{1}{2\pi} \log \|x-x'\|$.

as duas grandezas estão amarradas ao campo de velocidades, X

DFQS

Note que a equação de Poisson acima é non-linear

No sentido em que há uma dependência funcional entre

ω e ψ . Para ver isso de outra maneira temos que em 2D em regime estacionário

$$D: \frac{Dw}{Dt} = 0 \Rightarrow$$

$$(u \cdot \nabla) w = 0 \quad \text{ou ainda}$$

$$u w_x + v w_y = \bar{\psi}_y w_x - \bar{\psi}_x w_y = \begin{vmatrix} w_x & w_y \\ \bar{\psi}_x & \bar{\psi}_y \end{vmatrix} \equiv 0, \forall x, y.$$

$$\Rightarrow \omega = f(\psi) \Rightarrow \Delta \psi = -f(\psi)$$

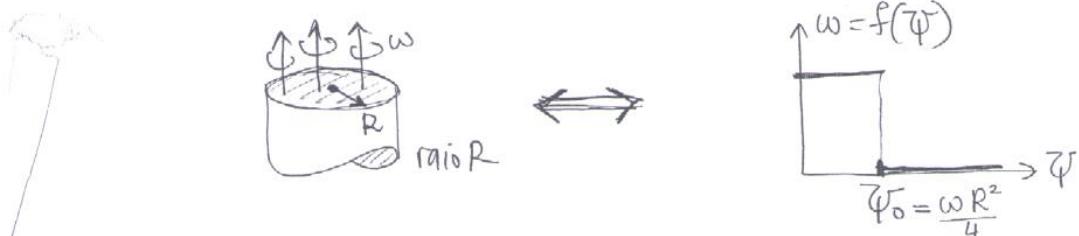
$F(x, y; \omega, \psi) = 0$
 $DF = 0$ impede ω, ψ
 de faterem o papel
 de variáveis indep.
 (Teo. F. Impli-
 ω e ψ tem
 interdepen-

Um problema fácil de resolver é o caso em que temos uma região de vorticidade constante e outra instacionária.

Negóis onde a vorticidade tem suporte compacto chamam-se

"vortex blobs". Sendo assim, seja o "vortex blob" globo

álmatico, com vorticidade constante igual a ω :



ψ_0 é a unha de corrente ao redor do tubo (sólido) de vorticidade. Usando coordenadas polares resolvemos a eq. de Poisson e obtemos

$$\psi(r) = \psi_0 \left(1 + 2 \log \frac{r}{R} \right), \quad \psi > \psi_0 \quad (r > R)$$

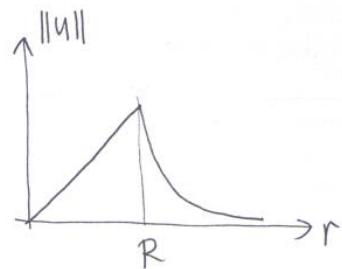
$$\psi(r) = \frac{\omega r^2}{4}, \quad \psi \leq \psi_0 \quad (r \leq R)$$

Vortex
blob (2)

DF96

temos ainda que

$$\|u\| = \begin{cases} \frac{\omega r}{2}, & \varphi \leq \varphi_0 \\ \frac{\omega R^2}{2r}, & \varphi > \varphi_0 \end{cases}$$



Verifique as "passagens".

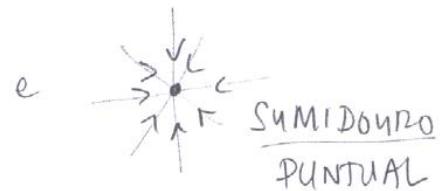
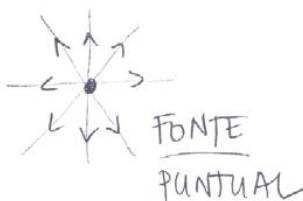
• Vamos agora o potencial associado a FONTES, SUMIDOUROS e DIPOLOS

(388)

■ Não é difícil ver que uma FONTE pode ser representada por $\Phi(z) = m \log z$, com intensidade $m > 0$ e um

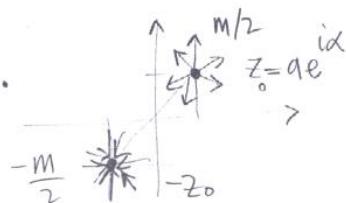
SUMIDOURO quando $m < 0$. Note que $\varphi = m \arg(z)$

ou seja



■ O DIPOLO ocorre quando uma fonte e um sumidouro estão a uma distância infinitesimal.

$$\Phi(z) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{m}{2} \log(z - ae^{i\alpha}) - \frac{m}{2} \log(z + ae^{i\alpha}) \right],$$

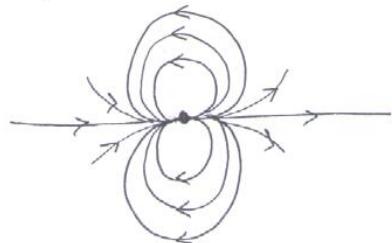
com $ma = K = \text{constante}$.

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{m}{2} \left(\log \left(1 - \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right) - \log \left(1 + \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right) \right) \right] = \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{m}{2} \left[\left[\left(\frac{a}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{\left(\frac{a}{z} e^{i\alpha} \right)^2}{2} + \dots \right] - \left[-\left(\frac{a}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{\left(\frac{a}{z} e^{i\alpha} \right)^2}{2} - \dots \right] \right] \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{K}{z} e^{i\alpha} + O(a) \right]
 \end{aligned}$$

Note que o fato de a intensidade m tender para o infinito, de forma que K seja constante, entra com que as duas singularidades se cancelam.

Temos então para o dipolo, o potencial complexo

$$\Phi(z) = \left(\frac{K}{z} \right) e^{i\alpha}$$



A equação das linhas de corrente nos dá' (com perda de generalidade) fazendo $\alpha = 0$

$$|z^2| = -\frac{K y}{\psi}, \text{ ou ainda ao completarmos o quadrado}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{K}{2\psi} \right)^2 = \left(\frac{K}{2\psi} \right)^2. \text{ As linhas de corrente}$$

são circulares.

- Formulações da teoria do potencial que levam em conta uma linha contínua de singularidades do tipo fonte e sumidouro, ou vórtices (que é a rotação destas singularidades), é chamada de formulação via um potencial de camada simples.
- Quando as singularidades forem dipolos, diz-se que temos uma formulação via um potencial de camada dupla. Esta terminologia é comum em eletrostática. Outra observação importante é a de que podemos criar dipolos de vórtices ("vortex doublets"): A derivação é análoga à do dipolo. Obtemos

$$\boxed{\Phi(z) = -\frac{iz}{z}}, \text{ onde } \lambda \text{ vem da hipótese}$$

de que as intensidades $\pm K$ dos vórtices tenderam para infinito conforme a sua separação $2a$ foi para zero, de maneira que $Ka = \lambda = \text{constante}$. Problemas relacionados à instabilidade de folhas de vorticidade

(ilustrados acima) podem ser formulados tanto via potenciais de camada simples, como potenciais de camada dupla, com respeito a vórtices. (Baker, Mervin & Orazag, Generalized vortex methods for free surface flow problems, J. Fluid Mech., vol 252, 1993)

DF 49

\rightarrow transparências



PROBLEMAS com FRONTEIRA LIVRE



JATOS e CORRENTES

(Minnowin, 2015) Cap XI
(Batch 493)

Fazemos as seguintes considerações iniciais:

- 1) Escoamento estacionário, irrotacional, ignorando forças externas.
- 2) Fronteiras são linhas de corrente, ou seja, não há fluxo através das mesmas.

$$\rightarrow (3) \text{ Lei de Bernoulli: } \frac{\|u\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{constante} \quad \begin{matrix} \rightarrow C_A \\ p_A \|u\|_A^2 \\ \rightarrow C_B \\ p_B \|u\|_B^2 \end{matrix} \quad \rho = \rho_0 \quad (\text{DF 42})$$

(4) A pressão na interface é a mesma estática (uniforme).

$$\text{Então } (3) + (4) + (\|u\|^2 \gg gh) \Rightarrow \|u\|^2 = \text{constante}$$

ao longo da interface.

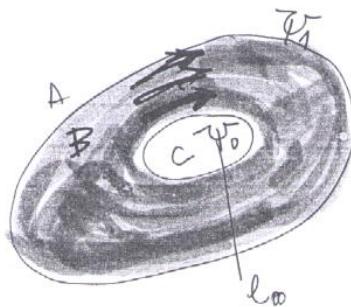
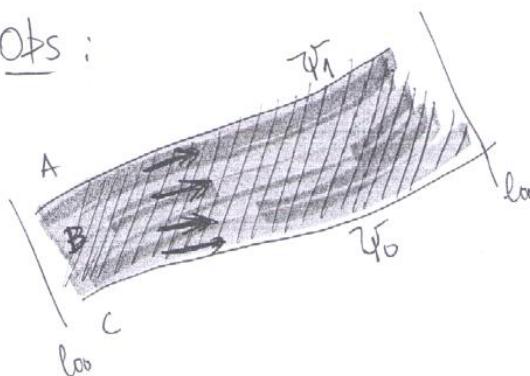
obtendo $\|u\|_B = 0$
efeto da gravidade (p.ex. peso dos jatos) pode ser desprezado.
 $\rightarrow pgh \quad [gh] = \frac{[L]}{[T]^2} \cdot [L]$

Esta teoria considera a linha de corrente livre (interface) como sendo uma linha isotáctica (pressão constante) e uma linha isotágnica (velocidade constante)
tagui (arrielio)

Obs: Note que não há nenhum problema interessante para linhas de corrente livres em uma região simplesmente conexa, sem vorticidade.

$\Delta \bar{\psi} = 0$ $\Rightarrow \bar{\psi} = \bar{\psi}_0 \Rightarrow$ fluido em repouso.

Obs:

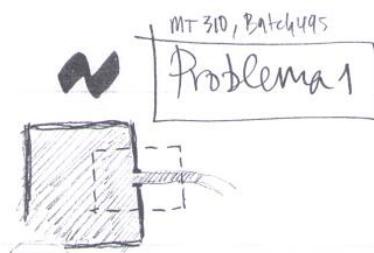


- se não há um fluido em A e C \Rightarrow tensos JATOS
- se há um fluido em A e C \Rightarrow tensos CORRENTES
- esses escoamentos são topologicamente equivalentes.

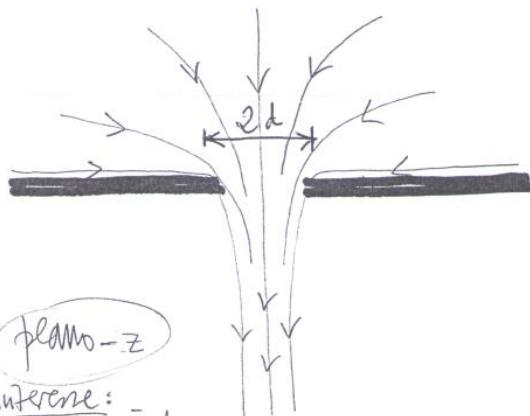
(B44)

DF101

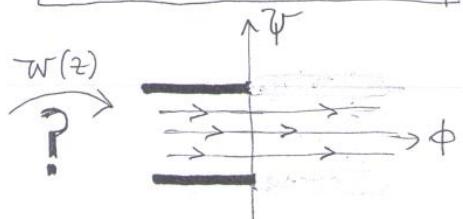
- Kirchoff (1869), Helmholtz (1868) e Prandtl (1884) começaram a trabalhar com escoamentos com linhas de corrente livres.
- Vamos alguns problemas.



Problema 1: Caixa d'Água furada



O problema está em achar $w(z)$. Isto é difícil. O caminho mais fácil é o indireto.



plano - z
Problema de interesse:
coef. de contragão do jato

Para traçar o caminho indireto é conveniente definir
a função complexa

$$\Omega(w) \equiv \log\left(\frac{dz}{dw}\right) = \log(u - iv)^{-1} = \log \bar{q} + i\theta$$

onde $q \equiv \|u\|$ e θ é a direção do vetor (u, v) com
respecto ao eixo horizontal. ou seja $u - iv = q e^{-i\theta}$.

A grande estreita desta troca de variáveis $\Omega(w)$ é que
no plano- Ω , linhas de velocidade constante são as linhas
 $\text{Re}(\Omega) = \text{constante}$. Mas estas são exatamente as linhas

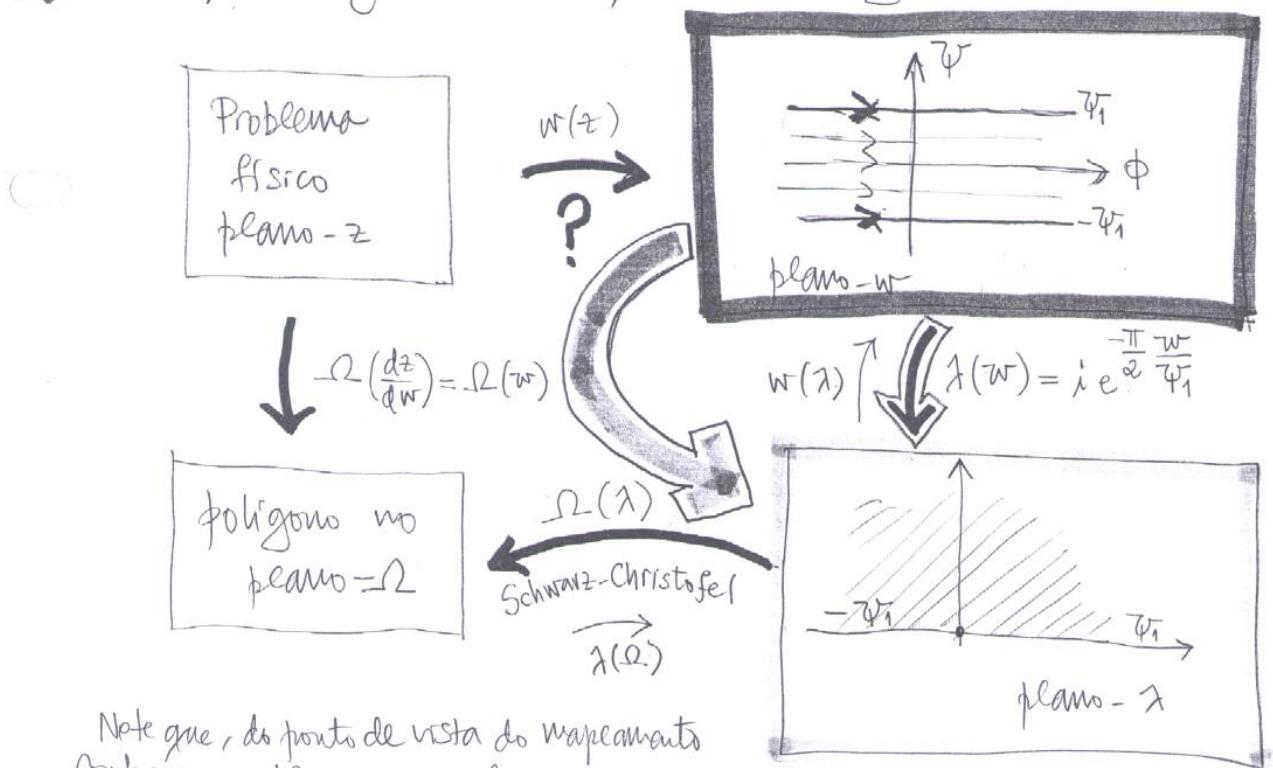
do tipo considerado para as linhas de corrente livres.
Vejá o argumento usando a lei de Bernoulli, dado acima.

DF102

A outra estreita é que ao longo dos obstáculos rígidos e planos a velocidade é tangente aos mesmos. logo o seu ângulo θ não muda e a parte imaginária de Ω é constante. Em resumo.

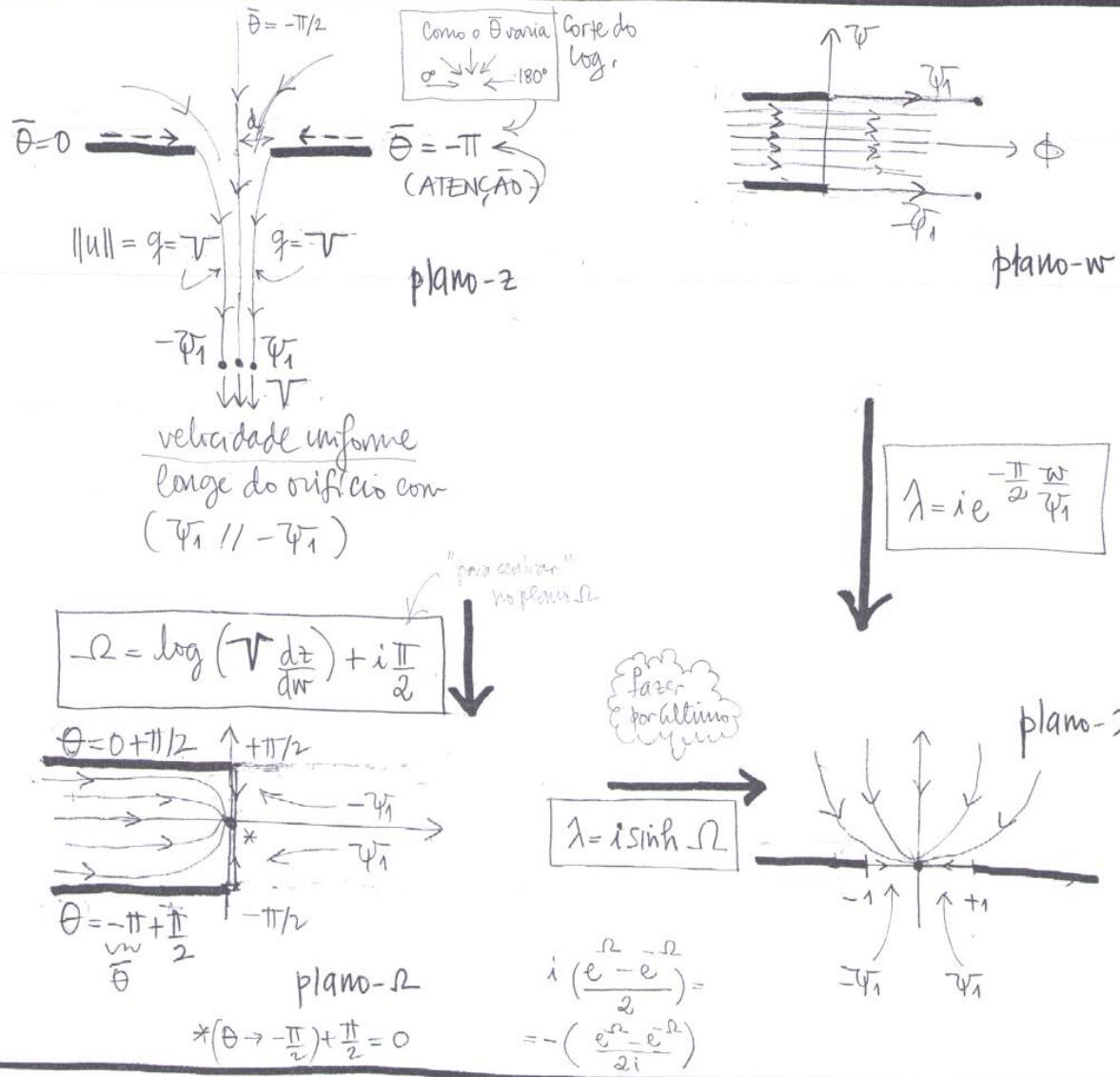
$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{linhas de corrente} \\ \text{livres} \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{Re}(\Omega) = \text{constante} = -\log \|u\| \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{obstáculos planos} \Rightarrow \operatorname{Im}(\Omega) = \text{constante} = -\arg(u-iw) \\ \Rightarrow \text{poligonais} \Rightarrow \text{existência de soluções via Schwarz-Christoffel} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

• O esquema geral de soluções tem o seguinte formato:



Note que, do ponto de vista do mapeamento conforme, o plano- w e plano- \bar{z} são as referências INICIAIS e FINAIS.

Voltando ao problema da caixa d'água, a meta principal é calcular o coeficiente de contracão no jato que sai do orifício.



Juntando as peças temos que

$$\lambda = i e^{-\frac{\pi w}{2\sqrt{V}}} = i \sinh \Omega = i \sinh \left[\log \left(\sqrt{V} \frac{dz}{dw} \right) + i \frac{\pi}{2} \right]$$

The Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics reflect the crucial role of mathematical and computational techniques in contemporary science. The series publishes expositions on all aspects of applicable and numerical mathematics, with an emphasis on new developments in this fast-moving area of research.

State-of-the-art methods and algorithms as well as modern mathematical descriptions of physical and mechanical ideas are presented in a manner suited to graduate research students and professionals alike. Sound pedagogical presentation is a prerequisite. It is intended that books in the series will serve to inform a new generation of researchers.

Also in this series:

A Practical Guide to Pseudospectral Methods, *Bengt Fornberg*
Dynamical Systems and Numerical Analysis, *A. M. Stuart and A. R. Humphries*
Level Set Methods, *J. A. Sethian*
The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,
Kendall E. Atkinson

Orthogonal Rational Functions, *Adhemar Bultheel, Pablo González-Vera,
Erik Hendriksen, and Olav Njåstad*

Theory of Composites, *Graeme W. Milton*

Geometry and Topology for Mesh Generation, *Herbert Edelsbrunner*

Schwarz–Christoffel Mapping

Tobin A. Driscoll
University of Delaware

Lloyd N. Trefethen
Oxford University

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS 2007

but also in capabilities and numerical power. (The second author insists on adding that a parallel development occurred as TAD quickly overtook LNT in his knowledge of Schwarz–Christoffel mapping.)

Mathematically, the subject continued to grow. Others such as Henrici (before his death in 1986), Däppen, and Floryan and Zemach had made important contributions. A new collaborator was Steve Vavasis, who together with TAD developed the CRDT algorithm. Based on Delaunay triangulation and Möbius transformations, it is very different from other methods in concept and largely immune to the problems of exponential crowding. Applications to large-scale nonsymmetric matrix iterations were pursued in collaboration with Kim-Chuan Toh. Applications to the computation of Green's functions and their uses in approximation theory and digital filtering were developed with Mark Embree. We came to realize that although experts in complex analysis had a depth of theoretical understanding that we could not match, we had accumulated an experience of the practical side of SC problems, and of the range of their variations and applications, that was unique.

The result is this book. Our style is concise, covering more material than might be expected in the small number of pages. For nearly every topic we have included a number of computer-generated figures, all of which are not just schematic but quantitatively correct. We hope that these figures will quickly tell the reader *what* one can do with these methods—always with high speed and accuracy—and that careful reading if desired will reveal the details of *how*. To assist in this latter purpose, an appendix gives short MATLAB scripts showing how to generate some of our figures with the help of the SC Toolbox.

We thank those whose comments and contributions improved this book. Endre Stili and Markus Melek helped us link the one-half quadrature rule with mesh refinement in finite elements; Lehel Banjai conducted experiments regarding the refinement ratio. Tom DeLillo, Alan Ercrat, and John Pfaltzgraff shared an advance copy of their work on doubly connected maps and thereby sparked our discussion in section 4.9. Louis Howell generously created the data for the circular-arc mappings in Figure 4.24. Martin Gukknecht and Dieter Gaier shared many discussions of conformal mapping with the second author over the years. For inspiration, we are grateful to Peter Henrici, who in many ways is the person most responsible for this book.

1

Introduction

1.1 The Schwarz–Christoffel idea

The idea behind the Schwarz–Christoffel (SC) transformation and its variations is that a conformal transformation f may have a derivative that can be expressed as

$$f' = \prod f_k \quad (1.1)$$

for certain canonical functions f_k . A surprising variety of conformal maps can be fitted into this basic framework. In fact, virtually all conformal transformations whose analytic forms are known are Schwarz–Christoffel maps, albeit sometimes disguised by an additional change of variables.

Geometrically speaking, the significance of (1.1) is that

$$\arg f' = \sum \arg f_k.$$

In the classical transformation, each $\arg f_k$ is designed to be a step function, so the resulting $\arg f'$ is piecewise constant with specific jumps (i.e., f maps the real axis onto a polygon). To be specific, let P be the region in the complex plane C bounded by a polygon Γ with vertices w_1, \dots, w_n , given in counter-clockwise order, and interior angles $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$. For now, we assume that P is bounded and without cusps or slits, so that $\alpha_k \in (0, 2)$ for each k . Let f be a conformal map of the upper half-plane H^+ onto P , and let $z_k = f^{-1}(w_k)$ be the k th prevertex.¹ We shall assume $z_n = \infty$ without loss of generality, for if infinity is not already a prevertex, we can simply introduce its image (which lies

¹ The Carathéodory–Osgood theorem [Hen74] guarantees a continuous extension of f to the boundary. Hence the prevertices are well defined.

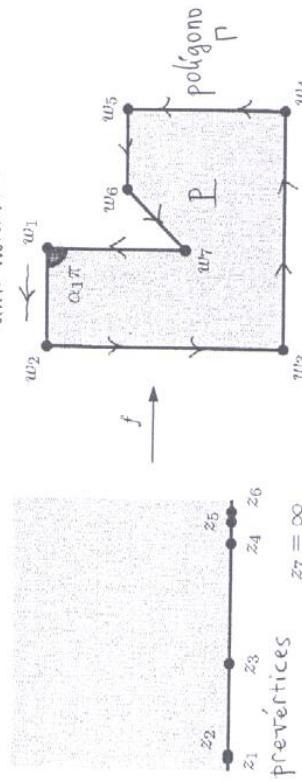


Figure 1.1. Notational conventions for the Schwarz–Christoffel transformation. In this case, z_1 and z_2 are mathematically distinct but graphically difficult to distinguish. As with all figures in this book, everything shown is not just schematic but also quantitatively correct.

on Γ) as a new vertex with interior angle π . The other prevertices z_1, \dots, z_{n-1} are real. Figure 1.1 illustrates these definitions.

As with all conformal maps, the main effort is in getting the boundary right. By the Schwarz reflection principle, which was invented for this purpose, f can be analytically continued across the segment (z_k, z_{k+1}) . In particular, f' exists on this segment, and we see that $\arg f'$ must be constant there. Furthermore, $\arg f'$ must undergo a specific jump at $z = z_k$, namely

$$[\arg f'(z)]_{\frac{z_k}{z_k}}^z = (1 - \alpha_k)\pi = \beta_k\pi. \quad (1.2)$$

The angle $\beta_k\pi$ is the turning angle at vertex k . We now identify a function f_k that is analytic in H^+ , satisfies (1.2), and otherwise has $\arg f_k$ constant on \mathbf{R} :

$$f_k = (z - z_k)^{-\beta_k}. \quad (1.3)$$

Any branch consistent with H^+ will work; to be definite, we pick the branch with $f_k(z) > 0$ if $z > z_k$ on \mathbf{R} . The action of f_k on the real line is sketched in Figure 1.2.

The preceding argument suggests the form

$$f'(z) = C \prod_{k=1}^{n-1} f_k(z)$$

for some constant C . We will prove the following fundamental theorem of Schwarz–Christoffel mapping in section 2.2.

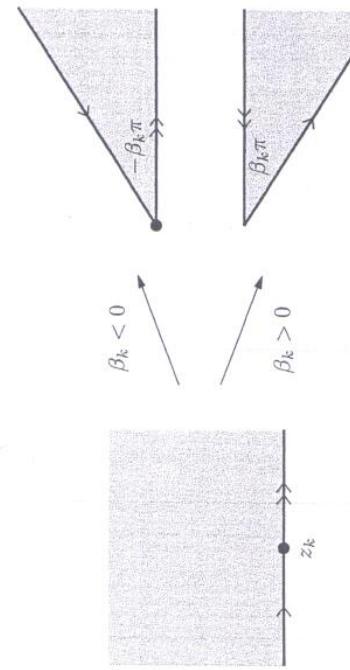


Figure 1.2. Action of a term (1.3) in the SC product. In either case, the argument of the image jumps by $\beta_k\pi$ at z_k .

Theorem 1.1. Let P be the interior of a polygon Γ having vertices w_1, \dots, w_n and interior angles $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ in counterclockwise order. Let f be any conformal map from the upper half-plane H^+ to P with $f(\infty) = w_n$. Then

$$f(z) = A + C \int^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - z_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta \quad (1.4)$$

for some complex constants A and C , where $w_k = f(z_k)$ for $k = 1, \dots, n-1$.

The lower integration limit is left unspecified, as it affects only the value of A .

The formula also applies to polygons that have slits ($\alpha = 2$) or vertices at infinity ($-2 \leq \alpha \leq 0$). Indeed, arbitrary real exponents can meaningfully appear in (1.4), although the resulting region may overlap itself and not be bounded by a polygon in the usual sense of the term; see section 4.7.

Formula (1.4) can be adapted to maps from different regions (such as the unit disk), to exterior maps, to maps with branch points, to doubly connected regions, to regions bounded by circular arcs, and even to piecewise analytic boundaries. These and other variations are the subject of Chapter 4.

But there is a major difficulty we have not yet mentioned: without knowledge of the prevertices z_k , we cannot use (1.4) to compute values of the map. In view of how we arrived at (1.4), the image $f(\mathbf{R} \cup \{\infty\})$ of the extended real line will necessarily be *some* polygon whose interior angles match those of P , no matter what real values of z_k are used; that much is forced by the parameters α_k . (Here we are broadening the usual idea of “polygon” to allow

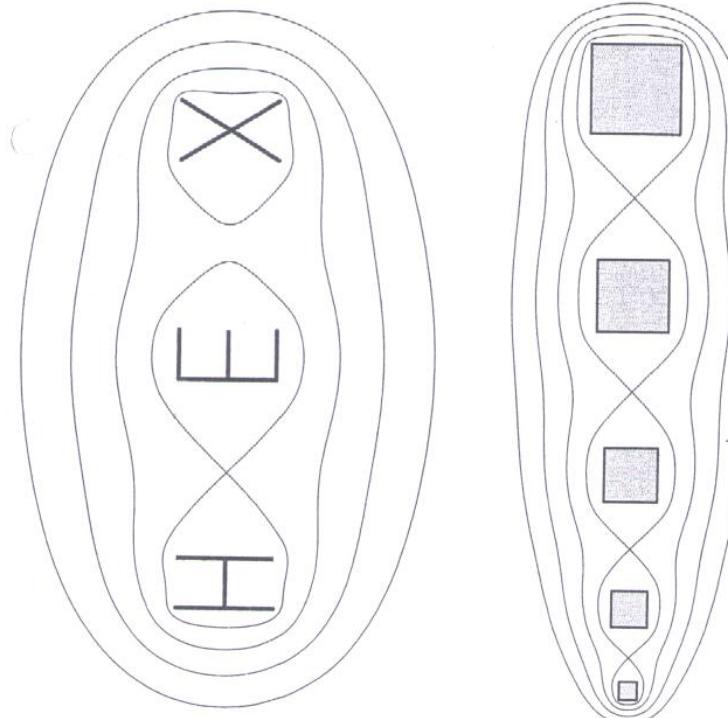


Figure 5.26. Examples of Green's functions for domains of connectivity three and five. Level curves are shown for each region. In the bottom picture, the gaps between squares were determined by solving a generalized parameter problem in order to make the four self-intersections occur.

One can also find the **harmonic measure** of each component of D with respect to the point at infinity. This quantity, which can be interpreted as the proportion of a minimal-energy charge distribution over D on each component, is simply given by the relative angles between spikes (and the real axis) in Figure 5.25. Moreover, it is possible using Φ to generate good polynomial approximations to any analytic function defined on each component of D —not just the zero function as in the minimax problem. In digital filters, one can use this idea to define one component as a “pass band” and another as a “stop band,” for example. For more see [ET99, SS99, SSW01].

Most of the figures in this book were produced using the SC Toolbox for MATLAB.¹ This software is in the public domain and is available (at the time of this writing) from

<http://www.math.udel.edu/~driscoll/SC/>

The toolbox is capable of half-plane and disk maps, exterior maps (section 4.4), strip maps (section 4.2), rectangle maps (section 4.3), and disk maps using the cross-ratio formulation (section 3.4). By tinkering with the provided routines, it is not too hard to produce maps to gearlike regions (section 4.8) and Riemann surfaces (section 4.7). Other variations and applications require more extensive programming efforts.

The toolbox defines polygons and the maps to them as named objects. Once created, these objects can be manipulated by using of common MATLAB functions and notations that have been extended to understand them. The main examples are

```
plot(p), plot(f)
eval(f,zp) or f(zp)
evalinv(f,wp) or
fi=inv(f);fi(wp)
```

Plot polygon p or map f.
Evaluate map f at point(s) zp.
Evaluate the inverse of f at point(s) wp.

The user may also examine and extract the data defining these objects and call low-level routines.

¹ Version 2.1 of the SC Toolbox and versions 5.2–6.0 of MATLAB. The first author hopes to maintain compatibility with future versions of MATLAB indefinitely. MATLAB is a registered trademark of The Mathworks, Inc., which has no affiliation with or responsibility for the SC Toolbox.

ou ainda

$$\frac{i}{2} \left(e^{\log(\lambda) i\pi/2} - e^{-\log(\lambda) i\pi/2} \right)$$

DF/09

$$\lambda = i e^{-\frac{\pi w}{2\sqrt{1}}} = \frac{i}{2} \left[-V \frac{dz}{dw}(i) + \frac{1}{V} \frac{dw}{dz}(i) \right]$$

$$\lambda = i e^{-\frac{\pi w}{2\sqrt{1}}} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{V} \frac{dw}{dz} + V \frac{dz}{dw} \right], \quad \left(\lambda = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{V} + V \right) \right)$$

$$2S\lambda = -1 - S^2$$
$$S^2 + 2S\lambda + 1 = 0$$

Solvendo a equação quadrática em $V \frac{dz}{dw}$ obtemos

$$V \frac{dz}{dw} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

Note nos diagramas que

$$\left(\frac{dw}{dz} = u - iv \rightarrow -i(-T) \right)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} V \frac{dz}{dw} = \pm i$$

$$\text{e } \lim_{\phi \rightarrow \infty} \lambda = 0$$

$$\frac{dz}{dw} = i \left(-\frac{1}{T} \right)$$

Logo descartamos a parte com sinal \oplus ou seja

$$iV \frac{dz}{dw} = -i\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}$$

$$V \frac{dz}{dw} = -\lambda - i\sqrt{1-\lambda^2}$$

$z = -i\tilde{z}$, cf ref. Batchelor

Integramos a equação

$$iV \frac{dz}{dw} = (-i\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}) dw,$$

queremos mudar para $d\lambda$

$$\text{onde } \frac{d\lambda}{dw} = -i \frac{\pi}{2\sqrt{1}} e^{-\frac{\pi w}{2\sqrt{1}}}. \text{ Com } \frac{d\lambda}{dw} = -\frac{\pi}{2\sqrt{1}} \lambda,$$

$$dw = -\frac{2\sqrt{1}}{\pi} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

podemos integrar

$$\left(-\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{41}} \right) dz = \left(-i + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) dx.$$

O resultado da integral é dado na eq. (6.13.6) (Batchelor pg 496).
 O ponto $z=d$ (na extremidade do orifício) é usado como limite inferior de integração: $\int_d^2 \dots dz = \int_1^{\lambda} \dots dx$

dar \times
 fch para $i\sqrt{41}$
 sinal \ominus

$$\left(\frac{-i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{41}} \right) (z-d) = i(\lambda-1) - \sqrt{1-\lambda^2} + \tanh^{-1} \sqrt{1-\lambda^2}$$

A relação $w(z)$ é obtida ao substituirmos

$$\lambda = i e^{\frac{-\pi}{2} \frac{w}{41}}$$

Calculemos o coeficiente de contragão do jato (B496)

Consideramos a linha de corrente livre da díscita. Temos

que $\begin{cases} \bar{Q} = \bar{Q}_1 \\ \phi = -Vs \quad (\text{pois } g = -V), \text{ com } s = \text{ comprimento de} \\ \quad \text{arco a partir do orifício} \\ z = i\theta \quad (\text{puremente imaginário}) \end{cases}$

- A equação acima $\lambda(\theta)$ pode ser usada para representar a linha de corrente livre. Temos que

$$\lambda = i \sinh \Omega = -\sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \quad (\Rightarrow 0 \leq \lambda \leq 1)$$

(ver figura) (ver figura)

- No limite quando $s \rightarrow 0$ (ao longo de Ψ_1), $\bar{\theta} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ou $\theta \rightarrow 0$

\times seja $\theta = \bar{\theta} + \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 0$. Concluimos que a parte imag. da expressão acima fica

\times $\left(\frac{i \sqrt{\pi}}{2 \Psi_1} \right) (x-d) \rightarrow 0$ ou ainda que

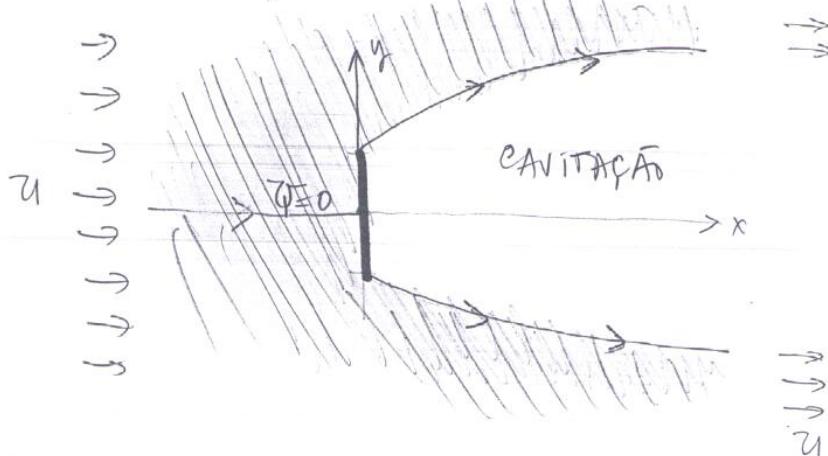
$$x \rightarrow \left(d - \frac{2 \Psi_1}{\sqrt{\pi}} \right) = d_{\infty}$$

relação linear \Rightarrow
escoamento uniforme

Note que $\Psi_1 = \nabla d_{\infty}$ ∇d_{∞}
ou seja
 $d - \frac{2 d_{\infty}}{\pi} = d_{\infty}$

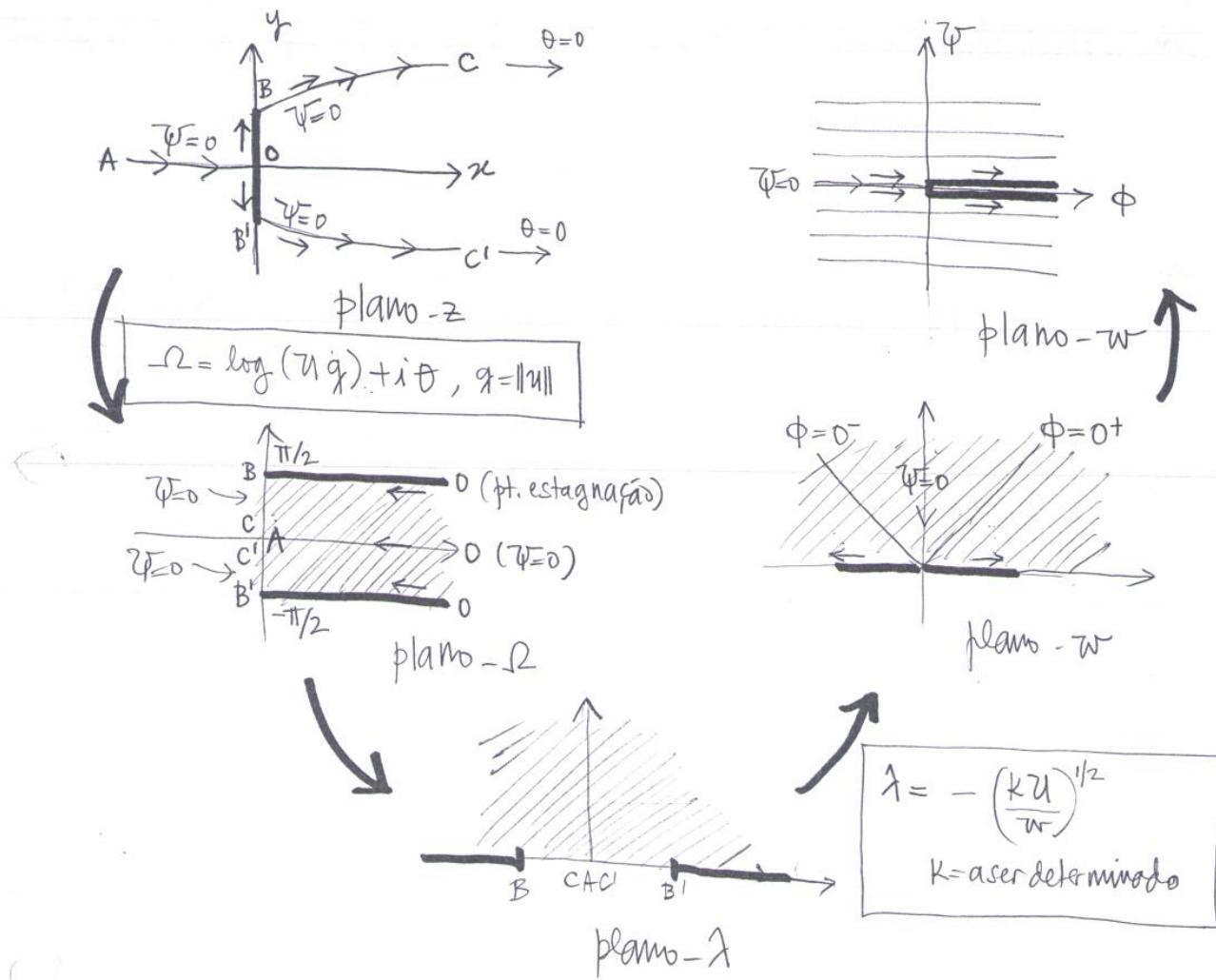
fator de contracção $= \frac{d_{\infty}}{d} = \frac{\pi}{\pi+2} \approx 0,61$

Podemos, para ilustrar, considerar as seguintes situações.



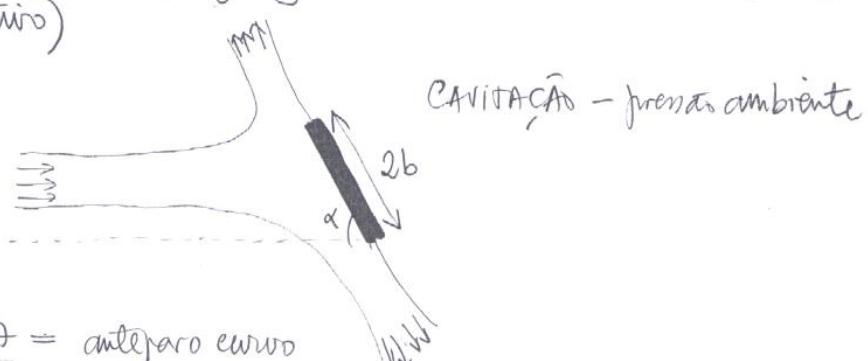
$$\oplus \quad V = -\nabla x$$

$$\Psi_1 \sim \Psi = -\nabla x$$



detalhes - Batchelor pg 498

- Outro problema (Rayleigh 1876 - ver Batchelor pg 500) (ilustrativo)



Levi-Cintia 1907 = anteparo curvo de forma arbitrária

Obs:

$$\begin{array}{l} u = \nabla y \\ v = -\nabla x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{array}$$

formalmente temos um...

Sistema Hamiltoniano.

Mas Ψ não é uma constante de movimento, por exemplo relacionada a um nível de energia.

No caso de N vértices pontuais

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j}^N k_i k_j \log \|x_i - x_j\|$$

com

$$\begin{array}{l} k_j \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j} \\ k_j \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \end{array}$$

Usando $\begin{cases} \tilde{x}_j = \sqrt{|k_j|} x_j \\ \tilde{y}_j = \sqrt{|k_j|} \operatorname{sgn}(k_j) y_j \end{cases}$

obtemos o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{y}_j} \\ \frac{d\tilde{y}_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}_j} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

ESCOAMENTOS VISCOSOS, INCOMPRESSIVEIS

No início do curso derivamos as equações para escoamento viscoso:

$$\int \frac{D u_i}{Dt} = -(\nabla p)_i + g b_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\nabla \cdot u) \right\}$$

$i = 1, 2, 3$

Quando o escoamento é incompressível temos as equações de Navier-Stokes incompressíveis:

$$\frac{D u_i}{Dt} = -\frac{(\nabla p)_i}{\rho_0} + b_i + \nu \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

onde

$$\rho = \rho_0 \text{ constante}$$

e a viscosidade

cinemática é dada por

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$$

A estas equações precisamos adicionar as condições de contorno. Para contornos sólidos, estáticos, usamos

$$u = 0 \quad (\text{condição de não-scorregimento})$$

Esta condição dá lugar a um mecanismo de produção de vorticedade ao longo do contorno. Veremos isto mais adiante

Consideremos agora as seguintes escalas - características do problema a ser estudado. Seja L uma distância (ou comprimento) característico e seja U a velocidade característica (ou seja de referência). Por exemplo L pode ser uma dimensão de um obstáculo ao escoamento. Por exemplo a largura de um anteparo, o raio de uma esfera. É escolhido arbitrariamente mas serve de referência. A sua ordem de grandezza é o mais importante. A velocidade U pode ser a velocidade no infinito, como vimos nos problemas de variáveis complexas. Sendo assim podemos definir a nossa escala de tempo $T = \frac{L}{U}$.

Fazemos agora o nosso estudo com respeito à estas escalas. Para isso introduzimos variáveis adimensionais

$$\tilde{u} = \frac{u}{U}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad \tilde{t} = \frac{t}{T},$$

$$\tilde{v} = \frac{v}{U} \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}$$

$$\tilde{w} = \frac{w}{U} \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}$$

Vamos supor que não temos forças de massa, ou seja,
a edp é homogênea.

A troca de variáveis nos da': $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (\tilde{u} \tilde{u})}{\partial \tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (\tilde{u} \tilde{u})}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\tilde{u} \tilde{u})}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{2}{L} \left(\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right) = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$$

Substituindo na eq. de Navier-Stokes temos:

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \left(\frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U^2}{L} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{U^2}{L} \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) = \quad \otimes$$

$$= - \frac{1}{\rho_0 L} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial U}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$$

Agrupando as escalas em poucos termos temos

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) = - \frac{1}{\rho_0 U^2} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{2}{UL} \right) \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right)}$$

Com isso identificamos a pressão adimensional como sendo

DF III

$$\tilde{f} = \frac{p}{\rho_0 U^2}$$

$$\frac{p}{\frac{Kg}{L^3} \frac{L^2}{T^2}} = \frac{p}{\frac{[L^2]}{[L^2]} \frac{L}{T^2}}$$

área

Por conveniência abandonamos o "n" e escrevemos as eq. de Navier-Stokes adimensionais na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = - \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u$$

$\nabla \cdot u = 0$

onde o número de Reynolds é definido por $Re \equiv \frac{UL}{\nu}$.

Vemos que as equações de Euler são o limite singular (a nível das equações) das equações de Navier-Stokes no limite em que $Re \rightarrow \infty$. O número de Reynolds

$$\frac{UL}{\mu/\rho_0} = \frac{\text{lídica}}{\text{aproximado}} = \frac{\text{magnitude das forças inertiais}}{\text{magnitude das forças friccionais}}$$

(e.g. Acheson 31)

Vemos a seguir as noções de cavada limite e separação da cavada limite. Quando não há separação, o limite $Re \rightarrow \infty$ não effectivamente o escoamento inverso, ou seja, a cavada limite vai sendo "achatada" de encontro ao contorno sólido.

DF12

Uma ótima discussão se encontra no início do Capítulo 6 do Batchelor (pg 378).

Note que dois escoamentos com a mesma geometria e o mesmo número de Reynolds Re são SIMILARES mesmo que U, L etc... sejam diferentes. "Similar" significa que as soluções dos dois problemas são idênticas, a menos de um re-escalamento (quando voltamos das escalas adimensionais para as dimensionais). Análise dimensional é muito utilizada no projeto de modelos reduzidos utilizados em experimentos de laboratório.

Uma observação importante. Quando nos referirmos a um escoamento fricamente viscoso na verdade estamos dizendo que Re é muito grande ou seja $\frac{L}{Re}$ é muito pequeno. O efeito da difusão é muito pequeno. Note que isto independe diretamente do valor de μ ou ρ .

→ FATOS ASSOCIADOS A NAVIER-STOKES

Vejamos o seguinte teorema interessante. (por ex. usado em DF 118 para mostrar que $\frac{dE}{dt} \downarrow 0$)

TEO. PROJEÇÃO: Seja uma região W com contorno suave ∂W .

Qualquer campo vetorial w em W pode ser decomposto unicamente na forma

$$w = u + v$$

onde

$$\nabla \cdot u = 0, \quad v = \nabla p \quad \text{e} \quad u \cdot n = 0 \quad \text{em } \partial W \quad (\text{u é tangente a } \partial W)$$

Note que estamos decompondo \vec{w} em um campo solenoidal (\vec{u})
composto com um campo irrotacional (\vec{v}).

Note também que, guardadas as devidas proporções, este teorema tem um sabor análogo à decomposição de uma matriz qualquer em uma simétrica e outra antissimétrica. (Vide problema 5 da lista 1)

→ parte com divergência

→ parte com rotação

Demonstração (Chorin & Marsden 37)

(da unicidade e existência da decomposição)

ver Zhm (tese) (1,1,32) Vortex Methods
ver Chorin, AJ, Numerical Solution of

the Navier-Stokes Equations
Math. Comp., 22, pp. 745 - 762, 1968

= aplicação da decompos.
— exist. & unicidade
— método numéricos

① Primeiro vejamos que $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$, ou seja

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} dV = 0 \quad (\text{temos uma decomposição ortogonal})$$

Usamos a identidade

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = (\nabla \cdot \vec{u}) \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho$$

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla \rho dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = \int_{\partial \Omega} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

pelo teorema da divergência e impondo-se a condição de contorno de \vec{u} .

② Ortogonalidade nos da unicidade.

Seja $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$. logo

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + \nabla (\rho_1 - \rho_2) = 0$$

DEFIY

- Ortopodalidade nos da' que o produto interno de $(u_1 - u_2) + \nabla(p_1 - p_2)$ com $(u_1 - u_2)$, integrado sobre W , nos da'

$$\int_W \|u_1 - u_2\|^2 dV = 0 \Rightarrow \boxed{u_1 = u_2}.$$

Disto concluimos que $\boxed{\phi_1 - p_2 = \text{constante}} \rightarrow$ não muda o "v"
→ sempre podemos eliminar uma constante (em fluidos)

Existência: é possível tal construção?

$$w = u + v$$
$$\nabla \cdot w = \Delta p \quad (\nabla \cdot u = 0) \Leftrightarrow \text{eq. de Poisson}$$
$$w \cdot n = \frac{dp}{dn} \quad (u \cdot n = 0)$$

Dado um campo w , temos o seguinte problema para a parte irrotacional da decomposição:

$$\boxed{\Delta p = f, \quad f = \nabla \cdot w \text{ conhecido em } W}$$
$$\boxed{\frac{dp}{dn} = g, \quad g = w \cdot n \text{ conhecido em } \partial W}$$

Sabemos* que este problema tem solução única, a menos de uma constante desde que

$$\boxed{\int_W f dV = \int_{\partial W} g dA}$$

← Especialmente fácil de aceitar
* ver gg. livro em edp.

Note que esta condição de compatibilidade para w é satisfeita automaticamente pelo Teorema da Divergência. A condição de compatibilidade pode ser interpretada como "a massa gerada/removida dentro de W tem que ser balanceada pelo fluxo de massa ao longo da fronteira".

Para fechar a demonstração temos que

$u \equiv w - \nabla p$. Note que a constante arbitrária emp ~~X~~ desaparece na decomposição. Resta a pergunta: esse u que sobra tem as propriedades desejadas?

Veifiquemos:

$$\nabla \cdot u = \nabla \cdot w - \Delta p = 0 \text{ em } W$$

$$u \cdot n = w \cdot n - \frac{dp}{dn} = 0 \text{ em } \partial W.$$

Óbvio! Já imponemos isto na formulações da eq. de Poisson, com cond. de Neumann

Obs: Note que, usando notações de operadores, podemos definir \mathbb{P} como a projeção ortogonal no espaço de funções vetoriais solenoidais ou seja

$$w = \mathbb{P}w + \nabla p.$$

Temos que se $\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 \\ u \cdot n = 0 \end{cases}$, $\boxed{\mathbb{P}u = u}$ e também que $\boxed{\mathbb{P}v = 0}$

$$w = \mathbb{P}w + v$$

- Consideremos as eqs. de Navier-Stokes:

$$u_t + \nabla p = -\underbrace{(u \cdot \nabla) u}_{w} + \frac{1}{\rho} \Delta u$$

Note que $\mathbb{P}(u_t) = u_t$, para u suficientemente suave.

Como $\nabla \cdot u = 0$ e $u \cdot n = 0$ então $(\nabla \cdot u)_t = 0$ e $(u \cdot n)_t = 0$.

$\mathbb{P} w = u_t$ ou $u_t = \mathbb{P} \left(- (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \Delta u \right)$.

- Formalmente eliminamos a parêntese, esta formulação é de interesse teórico assim como numérico. A parêntese é recuperada como a parte irrotacional (a componente gradiente) de $w = - (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \Delta u$. (B217)

~~X~~ Uma referência para estas vantagens é A.J. Chorin, Math Comp 23, pp. 341-353, 1969.

- Podemos interpretar a equação de Navier-Stokes como a superposição de 2 mecanismos: transporte e difusão.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{transporte puro (Eq. Euler)}: \boxed{\frac{D u}{D t} = - \nabla p}, \text{ onde } u \text{ é} \\ \text{transportado sujeito ao gradiente de pressão.} \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} \text{difusão pura (Eq. do Calor)}: \boxed{u_t = \frac{1}{\rho} \Delta u} \end{array} \right.$

Em outras palavras,

Burgers (invariante de Hennemann
ao longo de características)

$$\left\{ \begin{array}{l} u \cdot \nabla u = \text{Termo de convecção ou inércia} \\ \frac{1}{\rho} \Delta u = \text{Termo de difusão ou dissipação.} \end{array} \right.$$

Se "desligarmos" um desses mecanismos (eliminando um dos termos acima) temos uma das duas equações "puras" descritas (Euler ou calor). A equação de Euler, nós já vimos como o limite " $R_e = \infty$ ". A equação de Stokes é obtida no limite em que os termos de transporte são desprezíveis quando comparados ao termo de difusão.

Podemos ver isto de 2 maneiras. Na primeira fazemos

apenas o re-escalonamento da velocidade, sendo $\tilde{u} = U \tilde{u}$.

Usando o cálculo acima escrevemos

(DF110) \otimes

$$\frac{\tilde{u}}{T} \cdot \tilde{u}_x + \frac{\tilde{U}^2}{L} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) = - \frac{P_0}{\rho L} \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}} + \frac{\tilde{\rho} U \Delta \tilde{u}}{L^2}$$

ou ainda

$$\tilde{u}_x + \epsilon \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) = - \left(\frac{P_0}{\rho \epsilon U^2} \right) \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{U \Delta \tilde{u}}{L^2} \right)$$

onde fizemos $\tilde{u} \left(\frac{1}{L} \right) = \epsilon \ll 1$.

pequena velocidade*

Nesta análise L e T são escalas

dadas e portanto a velocidade característica é $U^* = \left(\frac{L}{T} \right)$, com $R_e = U^* L / \nu$

de referência

{U = característica do problema}

(DF II 10)

$$\frac{\bar{u}}{+} \bar{u}_T + \left(\frac{\bar{u}^2}{L} (\bar{u} \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{w} \bar{u}_{\bar{z}}) \right) = - \frac{p_0}{\rho_0 L} \bar{p}_{\bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \right) \Delta \bar{u}$$

ver Batchelor 217

$$\bar{u}_T + \left(\frac{\bar{u} T}{L} \right) (\bar{u} \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{w} \bar{u}_{\bar{z}}) = - \frac{p_0}{\rho_0} \frac{T}{\bar{u} L} \bar{p}_{\bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{u} T}{\partial \bar{u}} \right) \Delta \bar{u}$$

Mas vamos desrincular $\boxed{\bar{u}}$ de $\boxed{T = \frac{L}{\bar{u}}}$

Vamos considerar \bar{u} e $\frac{L}{+} = \bar{u}^*$ duas velocidades características

$$\text{onde } \boxed{\frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} = \epsilon \ll 1}$$

\bar{u} = "velocidade da partícula"
 \bar{u}^* = "velocidade do reômetro" = $\frac{L}{+}$

Assim pouca inércia, escoamento lento

$$\bar{u}_T + \epsilon \cancel{\left(\bar{u} \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{w} \bar{u}_{\bar{z}} \right)} = - \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{1}{\epsilon \bar{u}^{*2}} \right) \bar{p}_{\bar{x}} + \frac{1}{Re} \Delta \bar{u}$$

$$\text{onde } \boxed{Re \equiv \frac{\bar{u}^* L}{\nu}}$$

$\bar{p} = \bar{p}/(\rho_0 / \epsilon \bar{u}^{*2})$
 $\left(\frac{p_0}{\epsilon \bar{u}^{*2}} \right)$ = pressão de referência e alta.

$$\text{e } \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{1}{\epsilon \bar{u}^{*2}} \right) = O(1) \Rightarrow \text{ou } p_0 = O(1/\epsilon) \text{ de modo}$$

Característica deste problema

DF118

Temos então que a velocidade em questão U é regenerativa

X

pois $U = \varepsilon U^*$. ~~Note que isto é válido para $\nabla p \perp \nabla U$~~

~~diminuta regenerativa~~, consequentemente escrevemos a EQUAÇÃO

de STOKES, como

$$U_t = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta U$$

($R = Re$ regenerativo) verificar

para que coef. seja $O(1)$

onde também fizemos a hipótese $p_0 = \varepsilon p_0 U^{*2} = \varepsilon p^*$. Esta é uma edp linear, parabólica.

fluidos densos $\rho = \frac{1}{\varepsilon} O(p_0)$

- Obs: fizemos uma linearização sistemática.
- A outra maneira (com racional semelhante) é descartar o termo de convecção ao executar a projeção \mathbb{P} . (Chorin & Marsden pg. 40).

Voltamos à e.g. de Navier-Stokes ^{adimensional} e calculemos a taxa de variação da Energia Cinética no tempo

$$\frac{d E_C}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \|U\|^2 dV \stackrel{\text{lista}}{=} \int_V U \cdot \frac{DU}{dt} dV =$$

$$= \int_V (-U \cdot \nabla p + \frac{1}{Re} U \cdot \Delta U) dV = \frac{1}{Re} \int_V U \cdot \Delta U dV$$

$\nabla U \perp \nabla p$ (Teo. da Projeção, DF112)

X

DF119

Na última passagem usamos o Teorema da Projeção,

Supondo u um escoamento incompressível. Vamos agora a identidade

$\nabla \cdot (\underbrace{u \cdot \nabla u}_{\text{termo de convecção}}) = \nabla u \cdot \nabla u + u \cdot \Delta u$

para escrever

$$\boxed{\frac{d E_c}{dt}} = \int_{\text{W}} (\nabla \cdot (u \cdot \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla u) dV$$

$$= \boxed{-\frac{1}{Re} \int_{\text{W}} \|\nabla u\|^2 dV}$$

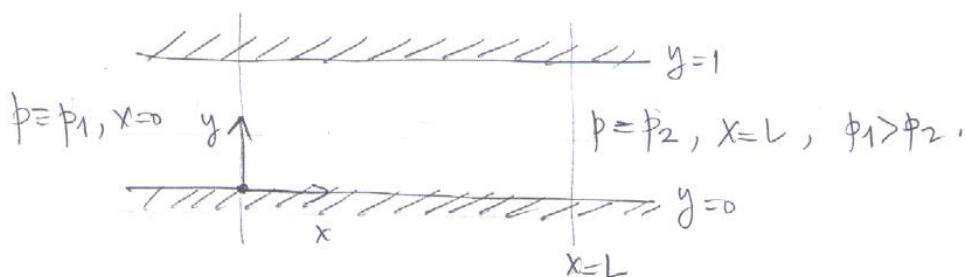
mais dissipação
perto de fronteira
(canal de enunciado
 $Re > 1$)

O primeiro termo é nulo pelo teorema da divergência e pela condição de não-escoregamento.

X
Converter
dimensão
2D? 3D?
e notações.

DF122

Ex: Considerar o escoamento estacionário entre duas placas localizadas em $y=0$ e $y=1$. O escoamento é tido como viscoso e incompressível. As condições de contorno da pressão são dadas na figura:



- Temos pela geometria do problema que

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, t) = (u(x, y), 0)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \boxed{u_{x=0}} \Rightarrow u = u(y).$$

As eqs. de Navier-Stokes ficam na seguinte forma:

$$u u_x = -p_x + \frac{1}{Re} (u_{xx} + u_{yy})$$

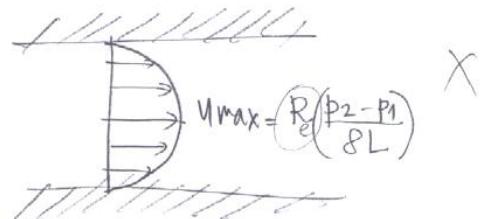
ou ainda

$$\boxed{p_x = \frac{1}{Re} u_{yy}} \rightarrow \text{Por separação de variáveis}$$

temos que

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = \text{constante} \\ \frac{1}{R} \frac{du}{dy^2} = \text{constante} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_1 + \left(\frac{p_2 - p_1}{L} \right) x \\ u(y) &= y(1-y) \frac{R}{2L} \left(\frac{p_2 - p_1}{L} \right) \end{aligned}}$$



As forças de pressão são contra-balanceadas pelas forças viscosas no fluido.

Note que se u for regular o suficiente então

$$\nabla \times \Delta u = \Delta (\nabla \times u) = \Delta w.$$

transporte de vorticidade

Juntando este fato ao Teorema da pag DF 53, temos para escoamentos 2D incompressíveis a seguinte equação diferencial

$$\boxed{\frac{Dw}{Dt} = \frac{1}{\rho_e} \Delta w}$$

pular até pg 122
→ círcula limite

→ círcula limite

Vemos que a difusão de vorticidade é promovida pela viscosidade. Isto vimos que para escoamentos incompressíveis podemos usar a função de corrente na formulação

$$\begin{cases} \Delta \bar{\psi} = -w & \text{em } W \\ \bar{\psi} = 0 & \text{em } \partial W \end{cases}$$

$$u = \bar{\psi}_x, v = -\bar{\psi}_y.$$

A condições de não-escoregamento nos dá

$$\bar{\psi}_x = 0 \text{ e } \bar{\psi}_y = 0 \text{ em } \partial W.$$

Mas isto implica em $\boxed{\frac{d\bar{\psi}}{dn} = 0 \text{ em } \partial W}$.

Em resumo, temos o sistema

$$\begin{cases} \Delta \Psi = -w & \text{em } W \\ \frac{Dw}{Dt} = \frac{1}{R} \Delta w & \text{em } W \end{cases}$$

com $\nabla \Psi = \frac{d\Psi}{dh} = 0$ em ∂W .

Obs:

Formulações deste tipo são chamadas de formulação vorticidade-função de corrente.

Quando se trabalha com as velocidades diretamente diz-se formulação com as variáveis primitivas

Temos uma complicação neste problema. Estamos impondo tanto uma condição de Dirichlet como de Neumann, para a função de corrente. Esta dificuldade será discutida mais adiante e de certa maneira está associada ao complicado mecanismo de gerar a vorticidade na fronteira sólida.

② NOÇÕES de CAMADA LÍMITE

Considere o seguinte exemplo simples:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a, \quad y(1) = 1}, \quad x \in [0,1].$$

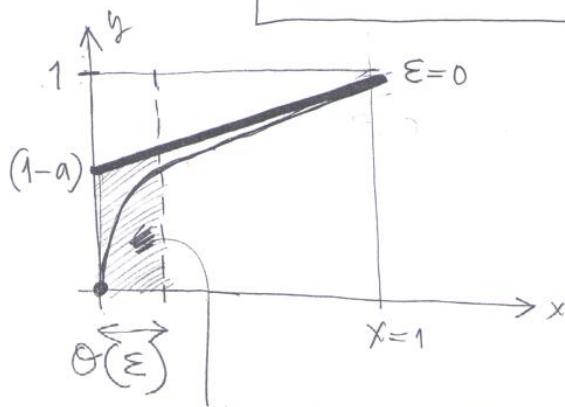
Temos que $y(x) = a(x-1) + 1$. Façamos a seguinte perturbação "viscosa":

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a \rightarrow \text{ordem mais alta} \Rightarrow \text{nova} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{condição de contorno} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array}$$

U
P

A Solução é:

$$y^\varepsilon(x) = \frac{(1-a)(1-e^{-x/\varepsilon})}{(1-e^{-1/\varepsilon})} + ax$$



$$\text{OBS: } \varepsilon=0 \Rightarrow y^0(x) = (1-a) + ax = 1 + a(x-1)$$

$$y^0(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^\varepsilon(x)$$

CAMADA LÍMITE $\rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Mas note que $y^\varepsilon(0) \neq y(0)$, mesmo quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

CAMADA LÍMITE = região onde as soluções $y^\varepsilon(x)$ e $y(x)$ diferem.

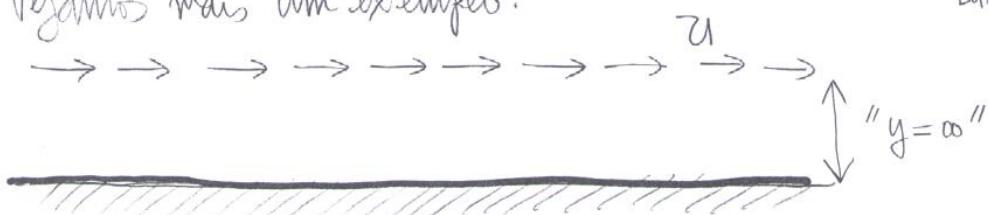
Este é um modelo trivial que revela diferenças dramáticas nas suas respectivas soluções. De certa maneira, isto é o que acontece com as equações de Euler e Navier-Stokes quando o número de Reynolds é grande ($1/R = \varepsilon$).

Podemos enumar algumas diferenças entre estas duas edp's:

- ① Perto de fronteiras sólidas o escoamento por Navier-Stokes é drasticamente modificado pela condição de não-escorregamento. A espessura da camada limite é da ordem de $1/\sqrt{R}$.
- ② A camada limite (região onde o escoamento é modificado) pode separar da fronteira.
- ③ Separação agita como uma fonte de vorticidade para todo o domínio.

Ex Vamos mais um exemplo:

Chorin & Marsden 71
Batchelor 308



Este modelo simples mostra que a fronteira sólida gera vorticidade.

O escoamento longe do chão (" $y=\infty$ ") é horizontal, uniforme, com velocidade U . Queremos encontrar o perfil de velocidades, no semiplano superior de maneira que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{0} \text{ em } y=0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \vec{u} = (U, 0) \end{array} \right. \quad \text{"uma espécie de forçante"}$$

A solução da equação de Euler é trivial: $\vec{u}(x, y, t) = (U, 0)$

Para acharmos a solução das eq. de Navier-Stokes

$$u_t + (u \cdot \nabla u) = - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \Delta u$$

primeiro fazemos as seguintes simplificações:

$$\boxed{\vec{u}(x, y, t) = (u(y, t), 0)}, \text{ já que a}$$

solução deve ser invariante por translação em x ,
consequentemente.

$$\boxed{u u_x + v u_y \equiv 0}, \quad \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 0} \quad \text{e}$$

N-S fica na forma

$$(difusão \text{ para}) \quad \boxed{u_t = \varepsilon u_{yy}}, \text{ com } \varepsilon \equiv \frac{1}{\rho}.$$

DF 126

Uma maneira conveniente de resolver este problema é reduzi-lo para uma edp com a seguinte mudança de variáveis:

$$\tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}$$

↑ escala vertical

Substitua na edp acima

$$U_t^{\sim} = \frac{\varepsilon T}{L^2} U_{\tilde{y}\tilde{y}}$$

~~talvez forçar melhor~~
mas $\tilde{y} = \frac{y}{L}, \tilde{t} = \frac{t}{T}$

$$U_t^{\sim} = \varepsilon \frac{d^2 U_{\tilde{y}\tilde{y}}}{d\tilde{y}^2}$$

$O(1) \Rightarrow dL = \int dx$

Esta nova edp nos "ensina" que podemos eliminar todos os parâmetros se escolhermos $L^2 = ET$. Isto

nos mostra a escala de tempo t necessária para que mudanças ocorram na camada de espessura L. Baseado neste fato seja a nova variável

"Self-similar"
ope) $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\varepsilon t}}$ (para eliminar TODOS os parâmetros)

O sinal é colocado por conveniência, como veremos a seguir. Façamos a substituição em

g. de DF 125 } $U_t^{\sim} = \varepsilon U_{\tilde{y}\tilde{y}}$, com $f(\eta) = \frac{u(y,t)}{U}$

Obtemos

$$f' \eta_t^{\sim} = \varepsilon f'' \eta_y^2$$

$$-\frac{f'}{2t} \eta_b = f'' \frac{1}{4t} \Rightarrow \boxed{f'' + 2\eta_b f' = 0} \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\infty) = 1 \end{cases}$$

DF 127

O fator de integração é $e^{(\eta^2)}$ e obtemos

$$f'(\eta) = c_1 e^{-\eta^2}$$

Integrando mais uma vez temos

$$f(\eta) = c_1 \int_0^{\eta} e^{-s^2} ds + c_2$$

Impondo as condições de contorno temos

$$f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-s^2} ds = \operatorname{erf}(\eta)$$

Obs: O "2" no denominador do η faz com que a função $\operatorname{erf}(\eta)$ aparecesse automaticamente, sem re-escalamentos

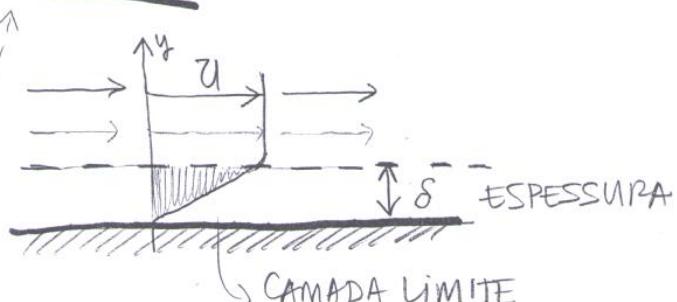
$$\begin{cases} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds \\ \operatorname{erf}(\infty) = 1 \end{cases}$$

ou ainda

$$\boxed{u(y, t) = U \operatorname{erf}\left(\frac{y\sqrt{R}}{2\sqrt{t}}\right)} \Rightarrow \begin{cases} u(0, t > 0) = 0 \\ u(y, t) \rightarrow U, y \rightarrow \infty \end{cases}$$

A solução é da forma

$$\boxed{\delta = O\left(\sqrt{\frac{t}{R}}\right)}$$



Para um tempo fixo, a espessura da camada limite decresce proporcionalmente a $1/\sqrt{R}$.

Para um número de Reynolds fixo a espessura da camada limite cresce, por Difusão, na ordem de $\sqrt{\frac{t}{R}}$ (no tempo).

Como $\omega = \partial u / \partial y$ temos que

$$\boxed{\omega = -\frac{2U}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon t}} \quad , \quad t > 0}$$

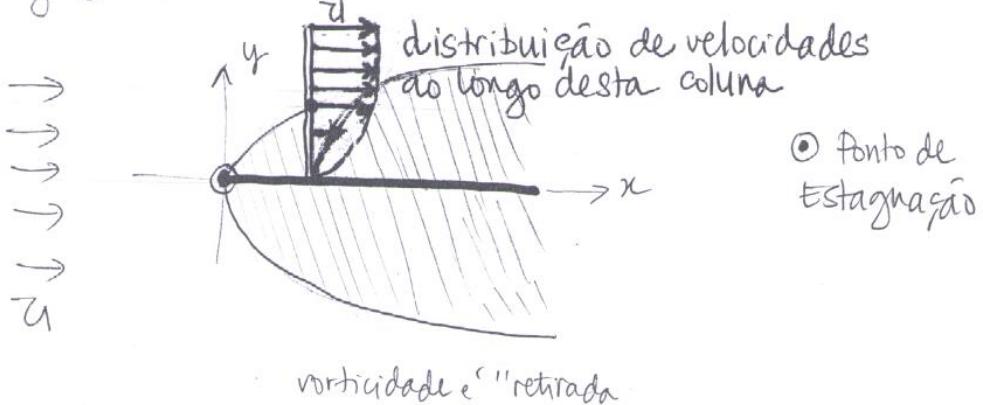
$$\frac{1}{R} = \varepsilon \quad X$$

(*) DF128A

(17)

Temos uma distribuição Gaussiana de vorticidade, com a Gaussiana centrada em $y=0$. A produção de vorticidade é gerada pelo chão ($y=0$). Neste caso a separatividade da camada limite não está presa a um ponto de estagnação no contorno sólido. De certa maneira ela está livre para ir avançando fluido adentro.

No caso de uma placa delgada, semi-infinita, temos um ponto de estagnação. Neste caso pode-se mostrar que a camada limite tem o seguinte perfil estacionário:



→ uma ótima leitura se encontra no Batchelor (seção 5.4) pg 277.

DF128A

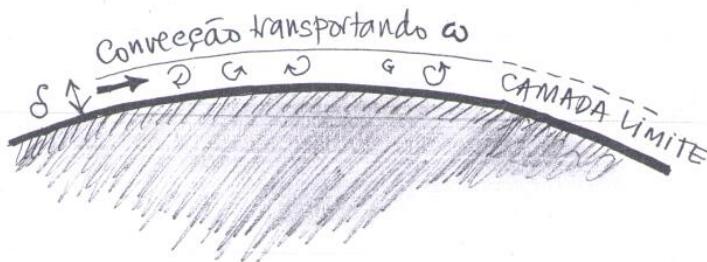
(*) Obs: no instante $t=0$ temos uma folha de vorticidade ao longo do Contorno.

(**) Temos um "estoque" infinito de vorticidade "armazenado" na fronteira Sólida.

Difusão é o mecanismo que retira vorticidade deste "estoque".

Para resolver o problema da placa semi-infinita usamos as equações de Prandtl, que derivaremos abaixo.

Fazemos no entanto, alguns comentários com respeito ao fenômeno da separação. Considere a seguinte figura esquemática:



18/06
Prova 2

Chamemos a espessura da camada limite S , de distância de penetração (do processo difusivo). Vimos que

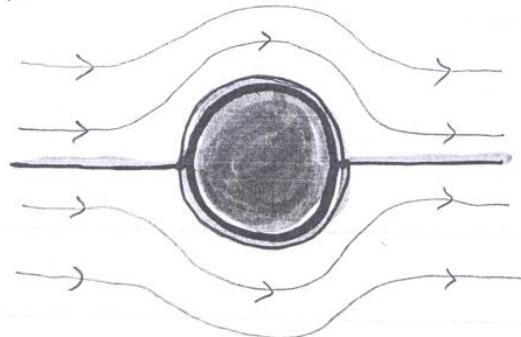
$$S = \sqrt{\frac{t}{R}}, \text{ onde havíamos chamado a distância}$$

característica de L . Podemos também definir a taxa de penetração por

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{Rt}}$$

Para números de Reynolds grandes convecção domina difusão, a taxa de penetração é baixa, e por intervalos de tempo pequenos (ou certos regimes estacionários) vemos a configuração da figura acima.

Isto é o que acontece com o cilindro no regime potencial.



Camada limite
Confinada à vizinhança
do cilindro.

Conforme a velocidade vai aumentando, o fenômeno da separação pode ocorrer. Este fenômeno é muito difícil de ser modelado matematicamente. Separar pode ser definida como a ^{descolamento} descolada das linhas de corrente, da camada limite, aderentes ao contorno sólido.



Segundo o Batchelor (pg.328) o ponto de separação está muito próximo ao ponto de velocidade máxima da linha de corrente externa da camada. Observa-se também que este ponto está próximo ao ponto de tensão cisalhante nula (um ponto singular em termos de esforços friccionais).

Podemos pensar (heuristicamente) que a partícula chega na curva em alta velocidade e no momento de fazê-la ⚡ freios (fricção) falham. A partícula sai pela tangente à curva caminhando com ela vorticidade para o interior do corpo fluido. Note que localmente podemos raciocinar lembrando que

$$\boxed{\tau_{ij} = \text{cortante} = \mu \frac{du}{dh}}$$

no caso em que

\vec{u} é aproximadamente paralelo ao contorno

$$\boxed{\tau_{ij} = 0} \rightarrow \text{partículas próximas à parede estão em alta velocidade} \left(\frac{du}{dh} = 0 \rightarrow \text{nenhuma variação vertical} \right)$$



Vejamos agora as equações de Prandtl

Sejam as equações de Navier-Stokes no semi-plano superior $\tilde{W} = y > 0$:

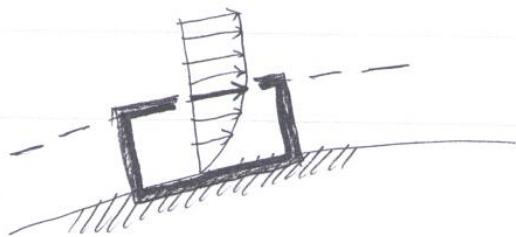
$$\left. \begin{cases} u_t + u u_x + v u_y = -p_x + \frac{1}{\rho} \Delta u \\ v_t + u v_x + v v_y = -p_y + \frac{1}{\rho} \Delta v \end{cases} \right\} \text{em } y > 0$$

$$u_x + v_y = 0$$

$$u = v = 0 \quad \text{em } \partial W = \{y = 0\},$$

Vimos no problema anterior que a camada limite tem espessura δ (pequena, quando R é grande).

Vimos também que o perfil de velocidades é da forma



É razoável fazermos a hipótese $U \gg v$ dentro da camada limite, onde $\vec{U} = (u, v)$, e a fronteira sólida é suave. Queremos fazer uma análise local, a nível das equações diferenciais, na região delimitada na "janela" acima. A idéia é fazer uma re-escalonamento adequado, de maneira a fazer um zoom (matematicamente falando) para dentro da janela.

Prandtl fez isto da seguinte maneira:

Seja $\tilde{y} = \frac{y}{\delta}$. Quando y tiver uma variação pequena de 0 a δ , \tilde{y} por sua vez irá variar de 0 a 1. Estamos nos posicionando dentro da camada limite de uma maneira que podemos "enxergar" melhor o que está acontecendo.

O mesmo temos que fazer com a componente v da velocidade, de forma a estendarmos suas pequenas variações. O re-escalonamento adequado é:

$$\begin{array}{lcl} \tilde{x} = x & \tilde{t} = t & \tilde{u} = u \\ \tilde{y} = \frac{y}{\delta} & \tilde{v} = \frac{v}{\delta} & \tilde{p} = p \\ y = \delta \tilde{y}, \delta \ll 1 & & v = \delta \tilde{v}, \delta \ll 1 \end{array}$$

\Rightarrow esse escalonamento amplifica, d' um zoom, em pequenas variações.

As duas únicas variáveis re-escaladas carregam consigo as informações pertinentes à modelagem do Prandtl: A traduzir português \rightarrow matemáticos

e'

zoom para dentro
da camada limite



$$\tilde{y} = \frac{y}{\delta}, \delta \ll 1$$

velocidade tangente
é dominante, com respeito
à componente normal
à fronteira sólida



$$u \gg v \text{ ou } \left| \frac{v}{u} \right| = O(\delta), \delta \ll 1$$

logo

$$\begin{array}{l} \tilde{u} = u \\ \tilde{v} = \frac{v}{\delta} \end{array}$$

- Substituindo na equações de Navier-Stokes obtemos (adimensional)

DF 134

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \frac{1}{R} \left[u_{xx} + \frac{1}{S^2} u_{yy} \right] \\ \delta v_t + \delta u v_x + \delta v v_y = -\frac{1}{S} p_y + \frac{1}{R} \left[\delta v_{xx} + \frac{1}{S} v_{yy} \right] \\ u_x + v_y = 0 \end{array} \right.$$

$$u = v = 0 \quad \text{em } \partial W$$

Usando $S = \frac{1}{JR}$ e fazemos formalmente $R \rightarrow \infty$ (ie $S \rightarrow 0$),

Dentro da camada limite (infinitesimal) o escoramento é efetivamente governado pelas equações

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + u_{yy}$$

$$p_y = 0$$

$$u_x + v_y = 0 \quad \text{em } y \in [0,1]$$

$$u = v = 0$$

$$y = 0$$

equações de Prandtl para a camada limite

(B306)

Com este escalonamento Prandtl foi capaz de reter parte do mecanismo difusivo (apenas em y) e mostrar assintoticamente o modelo matemático dentro da camada limite "microscópica". Note que o número de Reynolds não aparece mais. As equações da camada limite para fronteira curva são mais complicadas (S.L.Goldstein, Modern Developments in Fluid Mechanics (vol 1, 2), Dover, 1965)

No caso de fronteiras curvas, faz-se uma troca de variáveis de maneira que o contorno siga sendo $y=0$, e no final uma equação aparece alterada: a da pressão,

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = R u^2}, \text{ onde } R \text{ é a curvatura}$$

da fronteira sólida. (Chorin & Marsden pg 79). A interdependência entre p e u é mais acentuada e mesmo para fronteiras abatidas pode haver uma repercussão na dependência de p com respeito a x através da primeira equação.

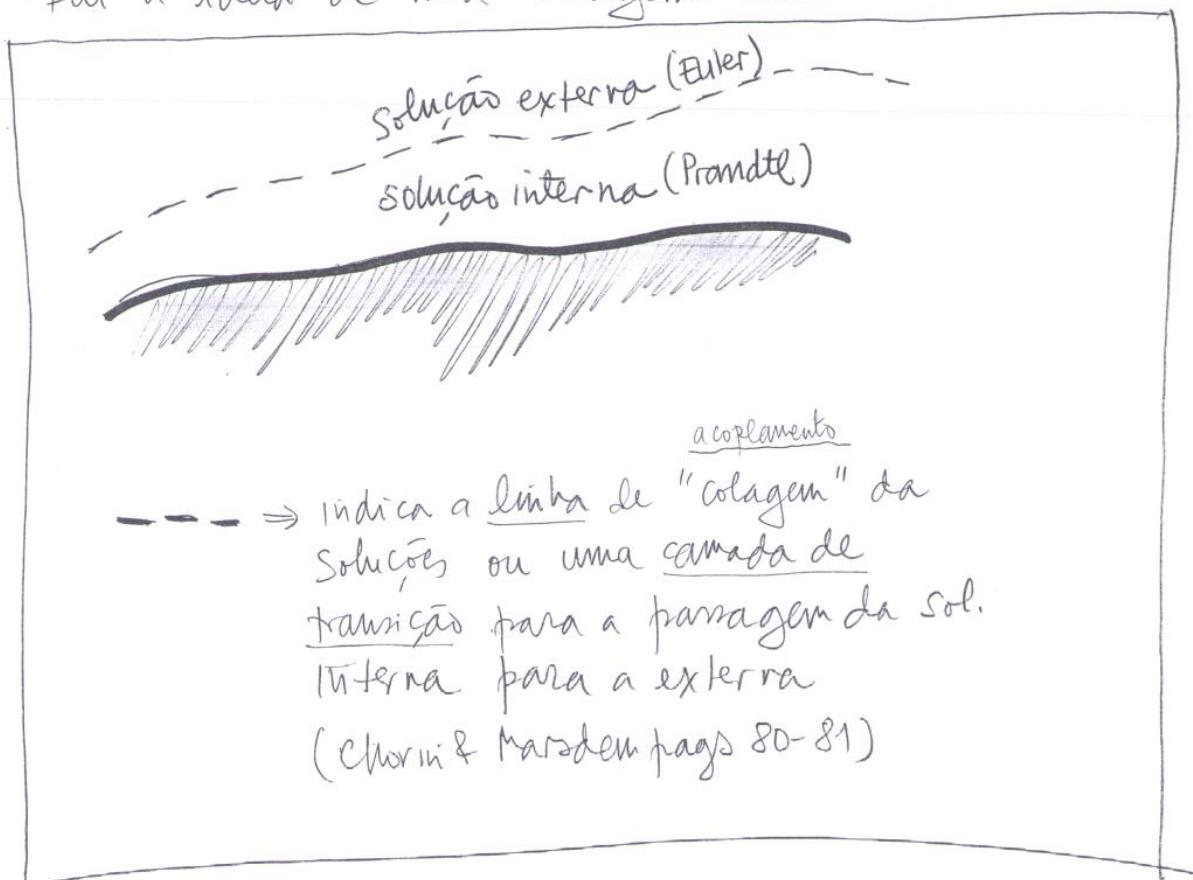
A teoria para curvadas limites é construída desejando-se que, de alguma maneira, a solução $\vec{u}(x, y, t)$ da equação de Navier-Stokes e a solução $\vec{u}_p(x, y, t)$ da equação de Prandtl satisfazam

$$\|\vec{u}(x, y, t) - \vec{u}_p(x, y, t)\| \leq \frac{C}{R^\alpha},$$

para $0 \leq y \leq \delta$; algum $\alpha > 0$, C constante e uma nova aproxiada, no limite $R \rightarrow \infty$.

A estratégia (com sabor de teoria assintótica) é "colar" a solução interna (da camada limite) com a solução externa (inviscida). (Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, The Parabolic Press, 1975). O termo técnico em inglês é "Matched Asymptotics".
 Dar a ideia de uma "colagem assintótica"!

corrente
acoplamento
assintótico



Obs: Veja a discussão relativa ao número de Reynolds crítico e a mecanismos relacionados com bifurcação de Hopf, gerando lutas de corrente oscilatórias atrás de um cilindro (Chorin & Marsden pag 103)

Propagação de Ondas de Superfície : ONDAS AQUÁTICAS (WATER WAVES)

DF136/1



- C
 - fluido in viscid, incompressivel
 - movimento irrotacional

foco na superfície livre \Rightarrow desprezamos vorticidade no fundo e transporte de sedimentos.

Teoria do Potencial (Stoker; orais)

$\nabla \times \vec{u} = 0$ e $\nabla \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow$ existe um potencial $\phi(x, y, z, t)$ em região simplesmente conexa.

$$\Delta \phi = 0 \text{ em } \Omega$$

Na superfície livre $z = \eta(x, y, t)$

$\nabla \times \vec{u} = 0 \Rightarrow$ lei de Bernoulli da seguinte forma

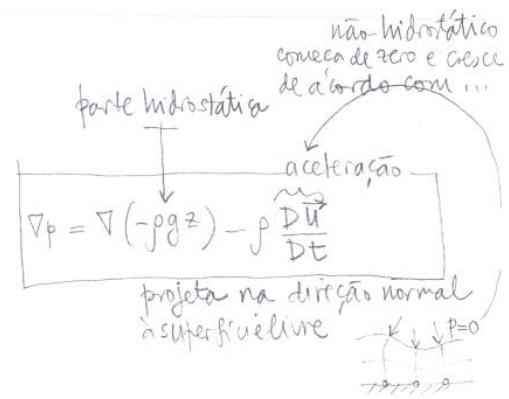
$$u_t + (\vec{u} \cdot \nabla) u + \frac{\nabla p}{\rho} = f$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) u = \frac{\nabla \|u\|^2}{2} - \vec{u} \times \nabla \times \vec{u}$$

$$u_t + \nabla \frac{\|u\|^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nabla(-gz) \Rightarrow$$

$$\nabla \left(\phi_t + \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + \frac{p}{\rho} + gz = G(t)$$



Lei de Bernoulli
(Condição Dinâmica)

$G(t)$ pode ser incorporado em p , pois não gera movimento:

$$\nabla p = \nabla(p + G(t))$$

ou $G(t)$ pode ser incorporado em ϕ na forma

$$\phi = \tilde{\phi} + \int_0^t G(s) ds \quad \text{onde } \nabla \phi \equiv \nabla \tilde{\phi} \text{ é a constante}$$

G desaparece da lei de Bernoulli para $\tilde{\phi}$.

Obs: Na fronteira livre $z = \eta(x, y, t)$ e $p = p_{atmos} \equiv 0$.

A superfície livre é uma superfície material

$$\dot{S}(x, y, z, t) \equiv 0$$

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \Rightarrow S_t + S_x \frac{dx}{dt} + S_y \frac{dy}{dt} + S_z \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\text{Mas } S(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) \equiv 0$$

$$\frac{D\dot{\eta}}{Dt} = -\eta_t - \phi_x \eta_x - \phi_y \eta_y + \phi_z = 0$$

$$\eta_t + \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \phi_z = 0 \quad \text{Condição Cinemática.}$$

① EDP completa:

$$\begin{array}{l} \text{Condições de} \\ \text{Fronteira Livre} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + g \eta_b = 0 \quad (\text{Bernoulli}) \\ \eta_t + \nabla \phi \cdot \nabla \eta_b - \phi_z = 0 \quad (\text{Cinemática}) \end{array} \right.$$

$$\Delta \phi = 0 \text{ em } \Omega$$

$$z = \eta(x, y, t) \quad (\text{MÓVEL})$$

(cinemática)

$$z = -h(x, y) \quad (\text{FIXO})$$

$$\frac{d\phi}{dn} = 0 \quad (\text{Neumann})$$

$$\frac{d\phi}{dn} = 0 \Rightarrow \text{"muro"}$$

cond. periódica

cond. de radiação

Seja a seguinte adimensionalização:

$$x = \lambda \tilde{x}, \quad y = h_0 \tilde{y}, \quad t = \frac{\lambda}{c_0} \tilde{t}$$

$$\eta = a \tilde{\eta}, \quad \phi = \frac{g \lambda a}{c_0} \tilde{\phi}, \quad h = h_0 \tilde{h} \left(\frac{\lambda}{l} \tilde{x} \right)$$

onde

λ = comprimento de onda característico (típico)

h_0 = profundidade característica

c_0 = velocidade de propagação caract.

a = amplitude característica

l = comprimento característico das variações da topografia

$$\frac{\lambda}{c_0} = \frac{[L]}{[L]/[T]} = [T] = \text{tempo característico.}$$

$$\frac{g \lambda a}{c_0} = \frac{[L]/[T]^2 \cdot [L] \cdot [L]}{[L]/[T]} = \frac{[L]^2}{[T]}$$

$$\nabla \phi = \text{velocidade} \Rightarrow [\phi] = [\text{velocidade}] \cdot [L]$$

$$\text{pois } [\nabla \phi] = \frac{[\phi]}{[L]}$$

$$\text{Logo } \left[\frac{g \lambda a}{c_0} \right] = \frac{[L]}{[T]} \cdot [L] = [\phi] \text{ e } \left(\frac{g \lambda a}{c_0} \right) \text{ é}$$

um potencial característico.

Obs: Isto é difícil de adinserir de antemão, mas seria desejável no final da adimensionalização.

As eq. para a teoria do potencial (não-linear)

adimensionalizada, em 2 dimensões, é:

Obs: por conveniência colocamos a origem no fundo.

$$\beta \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \text{ em } -h\left(\frac{x}{r}\right) \leq y \leq 1 + \alpha \eta \quad \text{EDP}$$

$$\begin{cases} \eta_t + \alpha \phi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \phi_y = 0 \\ \eta + \phi_t + \frac{1}{2} \alpha \phi_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \phi_y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 1 + \alpha \eta \\ \text{Cond. Contorno} \\ = \text{Superfície Livre} \end{array}$$

$$\phi_y + \frac{\beta}{r} h'\left(\frac{x}{r}\right) \phi_x = \frac{d\phi}{dn} = 0 \quad \text{em } y = \Theta h\left(\frac{x}{r}\right) \quad \begin{array}{l} \text{Cond.} \\ \text{Contorno} \\ = \text{Fundo} \end{array}$$

$$\begin{cases} \phi(x, 1 + \alpha \eta_0, 0) = \phi_0(x) \\ \eta_0(x, 0) = \eta_{00}(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Condições} \\ \text{Iniciais} \end{array}$$

onde os ' η_i ' foram abandonados.

$$\alpha = \frac{a}{h_0} \equiv \text{não-linearidade}$$

$$\beta = \frac{h_0^2}{\lambda^2} \equiv \text{dispersão}$$

$$\gamma = \frac{l}{\lambda} \equiv \text{irregularidades da topografia}$$

Obs: 2 tipos de não-linearidade

→ termos na EDP

"Geometria" = onde
esta o contorno superior?

Fazemos uma análise assintótica a nível das EDP's ou seja, consideremos um canal plano e perguntemos "qual as EDP efetivas para ondas longas (águas rasas)?"?

ondas longas (águas rasas) $\Rightarrow \beta \ll 1$

Vamos considerar ao mesmo tempo ondas fracamente não-lineares $0 < \alpha \ll 1$.

Como nas variáveis adimensionais a lámina d'água ($\alpha \eta$) é pequena fazemos uma expansão em y , em torno do fundo plano. Isto sugere uma solução na forma

$$\boxed{\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n f_n(x, t)}$$

Isto é basicamente uma estratégia à la' separação de variáveis e que deve (deve!) convergir pois $|y| < 1$.

Substituindo na equação de Laplace obtemos

$$\beta \phi_{xx} + \phi_{yy} = \sum_{m=0}^{\infty} y^m (\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_m + (m+1)(m+2) f_{m+2}) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x, y, t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n y^{2n} \frac{\partial^2 f_0}{(2n)!} \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n y^{2n+1} \frac{\partial^2 f_1}{(2n+1)!} \right]$$

Como $\phi_y(x_1, 0, t) \equiv 0 \Rightarrow f_1(x_1, t) \equiv 0$

então

$$\boxed{\phi(x_1, y_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \frac{y_1^{2n}}{(2n)!} \partial_x^{2n} f(x_1, t)}$$

onde abandonamos o índice de f_0 .

Basta agora satisfazermos as condições de fronteira livre.

em $y = 1 + \alpha \eta_0$, Primeiro calculemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_x = f_x - \frac{\beta}{2!} (1 + \alpha \eta_0)^2 f_{xxx} + \frac{\beta^2}{4!} (1 + \alpha \eta_0)^4 f_{xxxx} - \dots \\ \phi_y = -\beta (1 + \alpha \eta_0) f_{xx} + \frac{\beta^2}{6} (1 + \alpha \eta_0)^2 f_{xxxxx} - \dots \\ \phi_t = f_t - \frac{\beta}{2} (1 + \alpha \eta_0)^2 f_{xxt} + \frac{\beta^2}{4!} (1 + \alpha \eta_0)^4 f_{xxxxt} - \dots \end{array} \right.$$

Substituído na Lei de Bernoulli e na Condicão Cinemática obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + \alpha f_x \eta_x + (1 + \alpha \eta_0) f_{xx} - \frac{\beta}{6} f_{xxxx} = \mathcal{O}(\beta^2, \alpha \beta, \alpha^2) \\ \eta + f_t - \frac{\beta}{2} f_{xxt} + \frac{\alpha}{2} f_x^2 = \mathcal{O}(\beta^2, \alpha \beta, \alpha^2) \end{array} \right.$$

Como primeira aproximação (abandonando termos quadráticos em α e β) temos

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)f_x]_x - \frac{\beta}{6} f_{xxxx} = 0 \\ \eta + f_t + \frac{\alpha}{2} f_x^2 - \frac{\beta}{2} f_{xx} t = 0 \end{cases}$$

Definir $\tilde{u}(x,t) = f_x(x,t)$. Este é o termo dominante da velocidade a partir da expansão do potencial:

$$\phi_x(x, \mathbb{I}, t) = f_x(x, t) - \frac{\beta}{2} \mathbb{I}^2 f_{xx}(x, t) + \mathcal{O}(\beta^2),$$

$$\text{com } \mathbb{I} = 1 + \alpha \eta(x, t).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbb{I}} \int_0^{\mathbb{I}} \phi_x(x, y, t) dy &= \frac{1}{\mathbb{I}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{(2n)!} \left[\int_0^{\mathbb{I}} y^{2n} dy \right] \partial_x^{2n+1} f = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{(2n)!} \frac{\mathbb{I}^{2n}}{2n+1} \partial_x^{2n+1} f \end{aligned}$$

Logo a média vertical da velocidade

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \tilde{u}(x, t) - \frac{\beta}{6} (1+\alpha\eta)^2 f_{xx} + \mathcal{O}(\beta^2) = \\ &= \tilde{u}(x, t) - \frac{\beta}{6} \tilde{u}_{xx}(x, t) + \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta) \end{aligned}$$

Podemos inverter esta aproximação na forma:

$$f_x = \tilde{u}(x,t) = U(x,t) + \frac{\beta}{6} U_{xx}(x,t) + O(\beta^2, \alpha\beta)$$

Substituindo na EDP acima, mantendo aproximação $O(\beta^2, \alpha\beta, \alpha^2)$, obtemos

$$\begin{cases} \eta_t + \left[(1+\alpha\eta_b) \left(U + \frac{\beta}{6} U_{xx} \right) \right]_x - \frac{\beta}{6} U_{xxx} = 0 \\ \left[U + \frac{\beta}{6} U_{xx} \right]_t + \eta_{bx} + \alpha \left\{ \left[U + \frac{\beta}{6} U_{xx} \right] \left[U_x + \frac{\beta}{6} U_{xxx} \right] \right\} - \frac{\beta}{2} U_{xxt} = 0 \end{cases}$$

Note que tomamos a derivada com respeito a x da segunda equação. O sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \eta_t + \left[(1+\alpha\eta_b) U \right]_x = 0 \\ U_t + \eta_{bx} + \alpha U U_x - \frac{\beta}{3} U_{xx} t = 0 \end{cases}$$

A primeira equação nos dá $\eta_t = -U_x + O(\alpha)$.

Substituindo no último termo da segunda equação, não alteramos a ordem da aproximação ao escrevermos

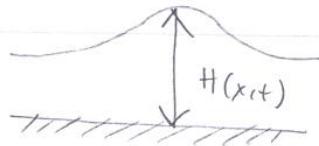
$\eta_t + \left[(1+\alpha\eta_b) U \right]_x = 0$	<u>Eq. de Boussinesq</u>
$U_t + \eta_{bx} + \alpha U U_x + \frac{\beta}{3} \eta_{bx} t = 0$	

As equações de Boussinesq, nas variáveis originais,
é escrita na forma

DF136/10

$$\begin{cases} H_t + (uH)_x = 0 \\ u_t + gH_x + uu_x + \frac{1}{3} h_0 H_{xtt} = 0 \end{cases}$$

onde u é velocidade horizontal e $H(x, t)$ é a
altura da lámina d'água;



Obs: Equações de Boussinesq é um modelo fracamente não-linear (primeiro termo na expansão em α) e fracamente dispersivo (primeiro termo na expansão em β).

Obs: Veremos adiante que a mudança $\tilde{u} = u + \frac{\beta}{6} U_{xx} + O(\beta^2, \beta)$ na 2ª equação altera a estabilidade das equações linearizadas.

Qualquer destes sistemas dispersos acima pode ser transformado em uma equação de Korteweg-de Vries (KdV).

Considere o sistema (DF 136/8 topo da página):

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + [(1+\alpha\eta)\tilde{u}]_x - \frac{\beta}{6}\tilde{u}_{xxx} = \Theta(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ \tilde{u}_t + \alpha\tilde{u}\tilde{u}_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta\tilde{u}_{xxt} = \Theta(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \end{array} \right.$$

No caso $\alpha=0, \beta=0$, se especializarmos para ondas viajantes para a direita temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + \tilde{u}_x = 0 \\ \tilde{u}_t + \eta_x = 0 \end{array} \right.$$

com $\tilde{u}_0 = \eta_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta_x + \eta_t = 0 \Rightarrow \eta(x,t) = \eta_0(x-t) \\ \eta = u \end{array} \right.$

X

logo podemos tentar escrever

$$\boxed{\tilde{u} = \eta + \alpha A + \beta B + \Theta(\alpha^2 + \beta^2)}$$

ansatz

Substituindo obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + \eta_x + \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \beta(B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}) = \Theta(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ \eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}) = \Theta(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \end{array} \right.$$

Note $\eta_t = -\eta_x + \Theta(\alpha, \beta)$ (veja o ansatz acima é 0, Sistema no topo da página)

Logo as duas equações são consistentes (a menos de termos da $\mathcal{O}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$) se:

$$Ax + 2\eta\eta_x = At + \eta\eta_x \quad (\partial_x = -\partial_t + \mathcal{O}(\alpha, \beta))$$

$$(A + \eta^2)_x = (A - \frac{\eta^2}{2})_t + \mathcal{O}(\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{A + \eta^2 = -\left(A - \frac{\eta^2}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{\eta^2}{4}}$$

$$Bx - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = Bt - \frac{1}{2}\eta_{xxt} + \mathcal{O}(\alpha, \beta)$$

$$\left(B - \frac{1}{6}\eta_{xx}\right)_x = \left(B - \frac{1}{2}\eta_{xy}\right)_t + \mathcal{O}(\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{B - \frac{1}{6}\eta_{xx} = -B + \frac{1}{2}\eta_{xx}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}\eta_{xx}}$$

Conclusão:

Obs: Whitham
ubb: similar to a
Niemann wave

$$\tilde{u}(x, t) = \eta(x, t) - \frac{\alpha}{4}\eta^2(x, t) + \frac{\beta}{3}\eta_{xx}(x, t) + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2)$$

uma das
eqs do sistema
sistema

$$\boxed{\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{\beta}{6}\eta_{xxx} = \mathcal{O}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)}$$

kdv normalizada (em α, β)



① Voltando à equação de Boussinesq:

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)U]_x = 0 \\ U_t + \alpha U U_x + \eta_x + \frac{\beta}{3} \eta_{xxx} = 0 \end{cases}$$

O limite não-dispersivo (veremos porque deve nome mais adiante) é a equação de Águas Razas (ou Ondas Longas):

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)U]_x = 0 & (\text{Conserv. Massa + Superfície livre}) \\ U_t + \alpha U U_x = -\eta_x & (\text{Conserv. de Quantid. de Mov.}) \end{cases}$$

A segunda equação é a equação de Euler com pressão hidrostática. Este sistema pode ser escrito na forma de uma lei de Conservação:

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)U]_x = 0 \\ U_t + \left[\frac{\alpha}{2} U^2 + \eta\right]_x = 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$\boxed{\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{F}(\vec{w}) = 0}, \quad \text{onde } \vec{W} = \begin{bmatrix} \eta \\ U \end{bmatrix} \text{ e } \vec{F} = \begin{bmatrix} (1+\alpha\eta)U \\ \frac{\alpha}{2} U^2 + \eta \end{bmatrix} \text{ e } \\ \text{a função fluxo}$$

Na forma não-conservativa o sistema é dado por

$$\boxed{\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + A(\vec{W}) \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = 0}, \text{ onde } A(\vec{W}) = \begin{bmatrix} \alpha U & (1+\alpha\eta_b) \\ 1 & \alpha U \end{bmatrix}$$

Obtemos as velocidades de propagação através dos autovalores de A :

$$(\alpha U - \lambda)^2 - (1 + \alpha \eta_b) = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha U \pm \sqrt{H}$$

No problema dimensional $F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$ número de Froude $\left\{ \begin{array}{ll} F < 1 & \text{subcrítico} \\ F = 1 & \text{crítico} \\ F > 1 & \text{supercrítico} \end{array} \right.$ onde $H = 1 + \alpha \eta$.

Os 2 autovalores são reais mostrando que as equações de águas rasas formam um sistema hiperbólico. Note que se o sistema for linearizado temos velocidades unitárias ou seja $\lambda = \pm 1$, pois $\alpha = 0$. Isto poderia ter sido concluído

a partir de

$$\begin{cases} \eta_t + U_x = 0 \\ U_t + \eta_x = 0 \end{cases}$$

Ex: verifique que $\eta_0 = U_0 = f(x)$
se temos uma onda para a direita

Derivando as equações com respeito a x e t podemos reescrever o sistema como 2 equações da onda:

$$\begin{cases} \eta_{tt} - \eta_{xx} = 0 \\ U_{tf} - U_{xx} = 0 \end{cases}$$

Outra maneira de verificar que este sistema é hiperbólico, com velocidades distintas nas duas direções, é na análise de Fourier. Considere solução na forma

$$\eta(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk$$

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk$$

representando informação viajando para a direita (índice ¹) e para a esquerda ^(*). Linearidade nos permite considerar cada uma separadamente. Substituindo um modo propagador genérico obtemos

$$\begin{cases} -iw\hat{\eta}_1 + ik\hat{\eta}_1 = 0 \\ -iw\hat{U}_1 + ik\hat{U}_1 = 0 \end{cases}$$

^(*) Aqui λ representa o comprimento de onda e $k = 2\pi/\lambda$ é chamado de número de onda.

Para que este sistema tenha solução não trivial é necessário que $\boxed{\omega^2 - k^2 = 0}$ ou seja $\boxed{\omega(k) = k}$.

Esta é a relação de dispersão da EDP. As ondas para a esquerda satisfazem a mesma relação.

Substituindo a relação de dispersão na transformada de Fourier para a solução do sistema temos

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}_1(k) e^{ik(x-t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}_2(k) e^{ik(x+t)} dk$$

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}_1(k) e^{ik(x-t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}_2(k) e^{ik(x+t)} dk.$$

Note que para sistemas hiperbólicos todo o espectro de Fourier viaja com a mesma velocidade. Isto é característico de ondas viajantes onde o perfil da onda permanece inalterado. Isto não acontece para a teoria do potencial, como mostraremos a seguir.

Comecemos com o sistema original linearizado:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \text{em } -h_0 < y < 0$$

$$\phi_{tt} + g\phi_y = 0 \quad \text{em } y = 0$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{em } y = -h_0.$$

A elevação da onda foi eliminada da condições de superfície livre mas pode ser recuperada facilmente através da relação

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \phi_t(x, 0, t)$$

Considerar a representação em Fourier para o potencial:

$$\phi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_1(y, k) e^{i(kx - \omega t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_2(y, k) e^{i(kx + \omega t)} dk,$$

Para que as integrais representem (formalmente) funções harmónicas é necessário satisfazer à edo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{\phi}_i}{dy^2} - k^2 \hat{\phi}_i = 0, \quad i=1 \text{ ou } 2, \\ \frac{d \hat{\phi}_i}{dy} = 0, \text{ em } y = -h_0. \end{array} \right.$$

Já imponemos a condição no fundo plano. É fácil de ver que

$$\boxed{\hat{\phi}_i(y, k) = F_i(k) \cosh(k(y + h_0))}$$

Nesta apenas satisfazendo a condições de superfície livre.
Obtemos

$$-\omega^2 F_i \cosh(kh_0) + kg F_i \operatorname{senh}(kh_0) = 0$$

o que nos leva à relação de dispersão

$$\boxed{\omega^2(k) = kg \tanh(kh_0)}$$

Substituindo para o potencial temos

$$\phi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(k) \cosh(k(y+h_0)) e^{ik(x - G(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(k) \cosh(k(y+h_0)) e^{ik(x + G(k)t)} dk$$

onde a velocidade de propagação de cada modo é dada

por $G(k) \equiv \frac{\omega(k)}{k}$. O sistema para a teoria do

potencial é dispersivo. Agora não temos mais uma onda viajante. O perfil inicial da onda irá mudando devido à defasagem dos modos de Fourier. No caso hiperbólico eles estão em fase. Para equações dispersivas não,

Dois limites importantes devem ser observados.

No limite de águas rasas (ou ondas longas) temos $\lambda \gg h_0$ e

$$\lim_{k \rightarrow 0} G(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh_0)} = \sqrt{gh_0}.$$

Esta é a velocidade em águas rasas $c_0 = \sqrt{gh_0}$. No limite oposto de águas profundas (ondas curtas) temos $h_0 \gg \lambda$ e

$$\lim_{h_0 \rightarrow \infty} G(k) = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Uma onda gerada por um terremoto submarino (um tsunami) pode ter 10km de comprimento. Temos que

$$C(k) = \sqrt{gh_0} = \sqrt{\frac{10 \text{ m/s}^2}{\pi^2} \cdot 1000 \text{ m}} = 100,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\boxed{C(k) = 360,00 \text{ km/h}}.$$

- Em alto mar estas ondas são abatidas (pequena amplitude) mas podem viajar extremamente rápido em direção à costa.

A relação de dispersão adimensional é dada por

$$\boxed{\tilde{w}(k) = \frac{k}{\sqrt{\beta}} \tanh(1/\beta)}, \text{ onde } \beta = \frac{h_0^2}{k^2}.$$

- Calculamos agora a relação de dispersão dos modelos de Boussinesq, KdV e similares.

Consideremos inicialmente a primeira versão truncada (DF136/8)

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)\tilde{u}]_x - \frac{\beta}{6}\tilde{u}_{xxx} = 0 \\ \tilde{u}_t + \eta_x + \alpha\tilde{u}\tilde{u}_x - \frac{\beta}{2}\tilde{u}_{xxt} = 0 \end{cases}$$

Linearizado ($\alpha=0$).

A análise de Fourier nos dá

DF136/20

$$\det \begin{bmatrix} -ik - \frac{\beta}{6}(-ik^3) & -iw \\ -iw - \frac{\beta}{2}(k^2iw) & ik \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -k^2 - \frac{\beta}{6}k^4 + \omega^2 + \frac{\beta}{2}k^2\omega^2 &= 0 \\ -k^2 - \frac{\beta}{6}k^4 + \omega^2(1 + \frac{\beta}{2}k^2) &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{k^2 + \frac{\beta}{6}k^4}{1 + \frac{\beta}{2}k^2} \end{aligned}$$

e a relação de dispersão.

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k^2(1 + \beta/6 k^2)}{1 + \beta/2 k^2} \approx (k^2 + \frac{\beta}{6}k^4)(1 - \frac{\beta}{2}k^2 + O(\beta^2))},$$

ou seja

$$\boxed{\omega^2 \approx k^2 - \frac{\beta}{3}k^4 + O(\beta^2)},$$

Esta relação é consistente no limite de águas rasas

pois,

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{\sqrt{\beta}} \tanh(k\sqrt{\beta}) \approx k^2 - \frac{\beta}{3}k^4 + O(\beta^2)},$$

No entanto a relação acima é instável, para a representação da solução em Fourier, no sentido que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega^2(k) = \infty,$$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{k^2} \rightarrow \infty}$$

implicando em velocidades de fase $G(k)$ ilimitadas. \times

Um sistema do tipo

$$\begin{cases} \eta_t + u_x = 0 \\ u_t + \eta_x + \frac{\beta}{3} \eta_{xxx} = 0 \end{cases}$$

seria ainda pior pois é de fato instável. Note que

$$\det \begin{bmatrix} -iw & ik \\ ik(1 - \frac{\beta}{3}k^2) & -iw \end{bmatrix} = 0$$

e temos uma relação de dispersão consistente:

$$\boxed{\omega^2 = k^2 \left(1 - \frac{\beta}{3} k^2\right)}, \text{ No entanto o sistema}$$

amplifica as ondas curtas com $k > \sqrt{3/\beta}$.

• Ao usarmos a média vertical da velocidade obtemos um sistema estável nos dois sentidos mencionados acima. O sistema é da forma

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \frac{\beta}{3} u_{xxx} = 0 \end{cases}$$

com $\alpha = 0$.

A análise de Fourier, os modos viajando para a direita,
nos dá:

$$\begin{cases} -i\omega \hat{\eta}_1 + ik \hat{u}_1 = 0 \\ -i\omega \hat{u}_1 + ik \hat{\eta}_1 - i\frac{\beta}{3} k^2 \omega \hat{u}_1 = 0 \end{cases}$$

o que amanda

$$\det \begin{bmatrix} -\omega & k \\ k & -\omega \left(1 + \frac{\beta}{3}k\right) \end{bmatrix} = 0$$

A relação de dispersão é:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k^2}{1 + \frac{\beta}{3}k^2}}$$

Esta relação é consistente no limite de águas rasas, e é a mesma que para a equação de Boussinesq:
interpretada:

$$\begin{cases} \eta_t + u_x = 0 \\ u_t + \eta_x + \frac{\beta}{3} \eta_{xt} = 0 \end{cases}$$

A relação de dispersão vem da condição

$$\det \begin{bmatrix} -\omega & k \\ k - \frac{\beta}{3} k \omega^2 & -\omega \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^2 - \left(k^2 - \frac{\beta}{3} k^2 \omega^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{k^2}{1 + \frac{\beta}{3} k^2}}$$

Agora podemos analisar melhor a competição não-linearidade versus dispersão. No caso da KdV e do soliton há um "empate" perfeito. Os dois efeitos estão perfeitamente balanceados. O que queremos dizer com isto?

Considere a KdV (Drazin & Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge Univ. Press, 1989, pg 6 e pg 21)

$$u_t + (1+u) u_x + u_{xxx} = 0$$

Fazendo a mudança de variáveis (que são motivadas por Grupos de Lie)

$$(1+\eta) = \alpha \eta_0, \quad t = \beta \bar{t} \quad \text{e} \quad x = \gamma \bar{x}$$

obtemos

$$\eta_{\bar{t}} + \frac{\alpha \beta}{\gamma} \eta \eta_x + \frac{\beta}{\gamma^3} \eta_{xxx} = 0$$

uma escolha conveniente, que facilita a sua integração, é tal que

$$\eta_{\bar{t}} \stackrel{\text{D&J Johnson cap 2}}{\oplus} 6\eta \eta_x + \eta_{xxx} = 0$$

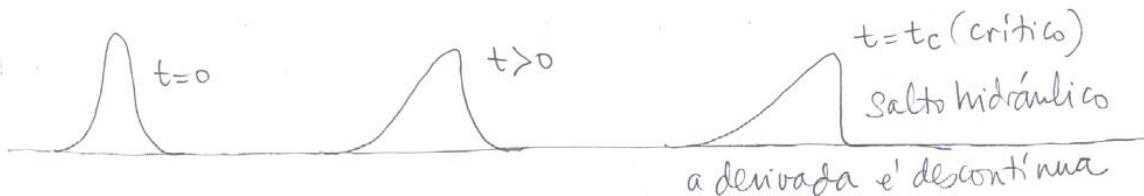
Escolhendo uma solução na forma de uma onda viajante $\eta_0 = f(\xi)$, $\xi = x - \zeta \bar{t}$, chega-se após 2 integrações e alguma álgebra ao soliton

$$\eta(x, \bar{t}) = f(x - \zeta \bar{t}) = -\frac{1}{2} c \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\sqrt{c}}{2} (x - \zeta \bar{t} - x_0) \right\}$$

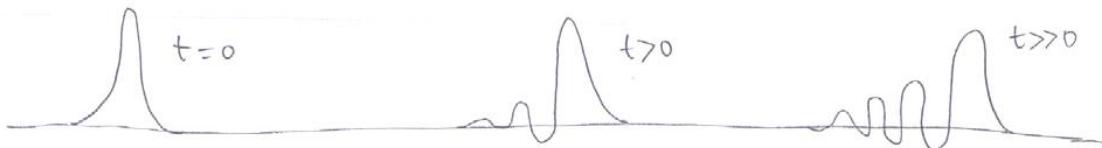
onde X_0 é uma constante arbitrária. Temos de fato uma onda viajante (conhecida como onda solitária e descoberta por Russel no canal de Edinburgh-Glasgow em 1834), onde sua velocidade de propagação depende de sua amplitude.

Onde está o balanço perfeito? O modelo não-linear

$\eta_t - 6\eta\eta_x = 0$, com uma onda solitária de condição inicial, irá produzir um choque ou seja uma descontinuidade em tempo finito, esta descontinuidade é conhecida como um salto hidráulico e acontece para ondas de enciente:



Por outro lado o modelo dispersivo $\eta_t + \eta_{xxx} = 0$, com a mesma condição inicial, tende a produzir soluções parecidas com a função de Airy, ou seja, com oscilações desenvolvendo na sua canda:



No primeiro caso o perfil tende a "tombar" para a frente devido à non-linearidade. No segundo a onda tende a se "desfazer" para trás devido à dispersão. Na KdV o balanço dos 2 ingredientes é perfeito e a onda retem a sua forma original.

$$\begin{cases} u_t + u_x + \varepsilon u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k(x-t-y)+\varepsilon k^3 t)} dk \right) f(y) dy$$

$$u(x, t) = \frac{1}{(3t)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} A_i \left(\frac{x-t-y}{(3t\varepsilon)^{1/3}} \right) f(y) dy$$

Como resolvemos o problema com topografia variável?

Uma análise interessante é apresentada por [Fofas & Papamichael, 1983, em "Gravity waves in a channel with a rough bottom", Studies of Applied Math., 68, pp. 89-102], uma publicação do MIT.

Considere a teoria do potencial não-linear na forma adimensional:

$$\beta \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad -h\left(\frac{x}{\delta}\right) < z < \alpha \eta(x, +)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta_t + \alpha \phi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \phi_z = 0 \\ \eta + \phi_t + \frac{\alpha}{2} \left(\phi_x^2 + \frac{1}{\beta} \phi_z^2 \right) = 0 \end{array} \right\} \text{em } z = \alpha \eta(x, +)$$

$$\phi_z + \frac{\beta}{\delta} h' \left(\frac{x}{\delta} \right) \phi_z = 0, \quad z = -h \left(\frac{x}{\delta} \right),$$

Note que a origem for colocada na superfície de equilíbrio.

Ordenemos os parâmetros em função de um ε pequeno:

$\alpha = \Theta(\varepsilon)$, $\beta = \beta_0 \varepsilon$ e $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Note que isto significa que $h_0 = \Theta(\varepsilon)$, ou seja profundidade e irregularidades do fundo estão na mesma escala. Não podemos fazer médias verticais ao longo da profundidade. Por outro lado Fofas & Papamichael querem fazer uma análise fracamente não-linear e fracamente dispersiva pois tanto α como β são $\Theta(\varepsilon)$.

Consideremos uma topografia periódica variando em uma escala rápida, já que $\delta = \sqrt{\varepsilon} < 1$. O problema é analisado através de uma análise assintótica em escalas múltiplas. Para tal, segundo Rosales & Papamichaelon, desenvolvemos os seguintes ansatz:

$$\phi(x, z, t) = \phi_0(x, \bar{z}, \tilde{z}) + \sqrt{\varepsilon} \phi_1(x, \bar{z}, \tilde{z}) + \varepsilon \phi_2(x, \bar{z}, \tilde{z}) + \dots$$

$$\eta_b(x, t) = \eta_0(x, \bar{z}) + \sqrt{\varepsilon} \eta_1(x, \bar{z}) + \varepsilon \eta_2(x, \bar{z}) + \dots$$

onde $\tilde{z} = \varepsilon t$, $x = x - C t$ e $\bar{z} = x/\sqrt{\varepsilon}$. Isto significa que o ansatz vai capturar ondas viajantes para a direita com velocidade efectiva igual a C (a ser determinada). O potencial e a elevação da onda (supostamente) variam lentamente no tempo (através de \tilde{z}) e contém uma dependência periódica na variável rápida \bar{z} , devido à topografia. A escala de referência espacial é tal que $h(\bar{z}+1) = h(\bar{z})$. Os potenciais ϕ_j também tem período unitário em \bar{z} .

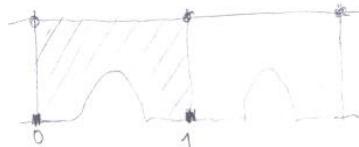
Foram criadas 2 variáveis espaciais. Uma rápida representando as irregularidades do solo. Outra lenta, e viamante, representando a onda. Temos agora uma lente "bifocal" e assim podemos prestar atenção na onda e na topografia ao mesmo

tempo e analisar a ~~interação~~ (se mover) entre as duas variáveis. Esta é a essência da análise em escalas múltiplas.

Ao substituirmos as expansões em potências de ε no sistema de equações, uma sequência de problemas-cellulares irá emergir.

Esses problemas-cellulares estão ordenados por potências de ε e a geometria de cada célula-potêncial é definida por

$$0 < \xi < 1, \quad -h(\xi) < z < 0.$$



Um problema-cellular típico é da forma

$$\beta_0 \phi_{\xi\xi} + \phi_{zz} = \tilde{a}(\xi, z; x, t), \text{ na célula-potêncial}$$

$$\phi_{z2} + \beta_0 h_\xi \phi_{\xi\xi} = \tilde{b}(\xi; x, t), \text{ na base da célula}$$

$$\phi_{z2} = \tilde{c}(\xi; x, t), \text{ no topo da célula}$$

Usando separação de variáveis, do tipo $[F(\xi, z)\Psi(x, t)]$ os problemas-cellulares podem ser reduzidos a problemas elípticos da forma

$$\beta_0 F_{\xi\xi} + F_{zz} = a(\xi, z), \text{ na célula}$$

$$L[F] = F_z + \beta_0 h_\xi F_\xi = b(\xi), \text{ na base da célula}$$

$$F_z = c(\xi), \text{ no topo da célula}$$

Os forçantes a, b e c são periódicos em ξ e a condição de compatibilidade (condição de solubilidade, para que a solução exista) é

$$\langle a \rangle = \int_0^1 \int_{-h(\xi)}^0 a(\xi, z) dz d\xi = \int_0^1 [c(\xi) - b(\xi)] d\xi.$$

Interprete esta expressão como compatibilidade implicando na média-cellular (não-normalizada)

do forçante interno ser igual ao fluxo pelas fronteiras da célula. Dizemos média não-normalizada em contraste com a normalizada dada por

$$\frac{\langle a \rangle}{\langle 1 \rangle}.$$

A condição de compatibilidade do problema-célula de $O(\varepsilon)$ nos leva à expressão

$$G^2 = 1 - \left\langle A_\xi^2(\xi, z) + \frac{1}{\beta_0} A_z^2(\xi, z) \right\rangle < 1,$$

Problema para $A(\xi, z)$

A função auxiliar $A(\xi, z)$ aparece na composição, por separação de variáveis, da solução do problema-célula de $O(\sqrt{\varepsilon})$. Em outras palavras, os termos do ansatz do potencial podem ser escritos na forma

$$\phi_0 = \tilde{\psi}_0(x, \zeta)$$

$$\phi_1 = \tilde{\psi}_1(x, \zeta) + A(\xi, z) \tilde{\tilde{\psi}}_1(x, \zeta)$$

$$\phi_2 = \tilde{\psi}_2(x, \zeta) + A(\xi, z) \tilde{\tilde{\psi}}_2(x, \zeta) + B(\xi, z) \tilde{\tilde{\tilde{\psi}}}_2(x, \zeta) \approx$$

etc...

A condição de compatibilidade acima mostra que as ondas vizinhas são atrasadas (retardadas) pela topografia periódica.

Temos aqui uma analogia com materiais compostos. O canal periódico é análogo a uma mistura de 2 materiais. Se por exemplo, fizermos uma inclusão periódica de um metal em outro teremos um composto efetivamente homogêneo com uma condutividade efetiva. Estamos considerando inclusões microscópicas. No problema do canal, $c_0 = 1$ é a velocidade para o fundo plano (material verdadeiramente homogêneo) e temos a "condutividade de referência". Por outro lado G é a "condutividade efetiva" do material composto (i.e. do canal periódico). Neste caso a mistura tem uma "condutividade efetiva" mais baixa do que a original: $G < c_0 = 1$.

Por fim Rosales & Papamichael mostram que a condição de solubilidade para ϕ_1 determina a função vizinha $\psi_0(x, t)$.
Após alguma álgebra e usando o fato de que $\eta_0 = G \psi_0(x, t)$ (condição obtida no problema celular $\Theta(\varepsilon^0)$) Rosales & Papamichael mostram que a equação efetiva do problema é a kdv

$$\eta_{tt} + \Theta (\eta_0^2)_x + b \eta_{xxx} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta \equiv G^{-1} \left\{ \frac{3}{4} \alpha_0 + \frac{1}{4} \alpha_0 \langle A_s^2 \rangle_s - \frac{1}{2G} \langle h_3 D \rangle_f \right\} \\ b \equiv G^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} \langle h_3 G \rangle_s - \frac{1}{2} G^2 \langle B \rangle_s \right\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta \equiv G^{-1} \left\{ \frac{3}{4} \alpha_0 + \frac{1}{4} \alpha_0 \langle A_s^2 \rangle_s - \frac{1}{2G} \langle h_3 D \rangle_f \right\} \\ b \equiv G^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} \langle h_3 G \rangle_s - \frac{1}{2} G^2 \langle B \rangle_s \right\} \end{array} \right.$$

onde $\alpha = E_{\text{do}}$, $A(\xi, z)$, $B(\xi, z)$, $C(\xi, z)$ e $D(\xi, z)$ são as funções auxiliares que aparecem no processo de separação de variáveis para ϕ_i , $i = 1, 2, 3$. As funções C e D aparecem ao mesmo tempo na definição de ϕ_3 . Note que a KdV-efetiva depende (através dos seus coeficientes) de médias na superfície (ξ) e ao longo do fundo. (f).

Note também que na análise assintótica reflexões foram ignoradas. Mas isto está de acordo com o conceito de meios efetivos. Estes fatos foram validados numericamente em Nachbin & Papamichaelon, Int. J. Num. Meth. Fluids, 1992 e Nachbin & Camelli, Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, SIAM, 1998.

Nunes & Papamichaelon também estenderam topografias desordenadas mas de pequenas amplitudes:

$$\boxed{z = -h\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = -\left(1 + \sqrt{\varepsilon} n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right),}$$

onde $n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ é uma função aleatória. A análise assintótica leva de novo a uma KdV-efetiva. Pequenas amplitudes é importante (como hipótese) de forma que as reflexões (ondas refletidas) sejam desprezíveis, legitimizando desta maneira um modelo uni-direcional como a KdV.

Em Nachbin & Papamichael, J. Fluid Mechano, 1992, o problema de topografias desordenadas é retomado sem a restrição de pequenas amplitudes, mas tomando-se o regime linear.

Vale notar que neste caso o regime periódico é dramaticamente diferente do regime aleatório (desordenado), onde reflexões serão produzidas.

Faremos agora uma BREVE descrição da análise.

O modelo em questão é a teoria linear do potencial:

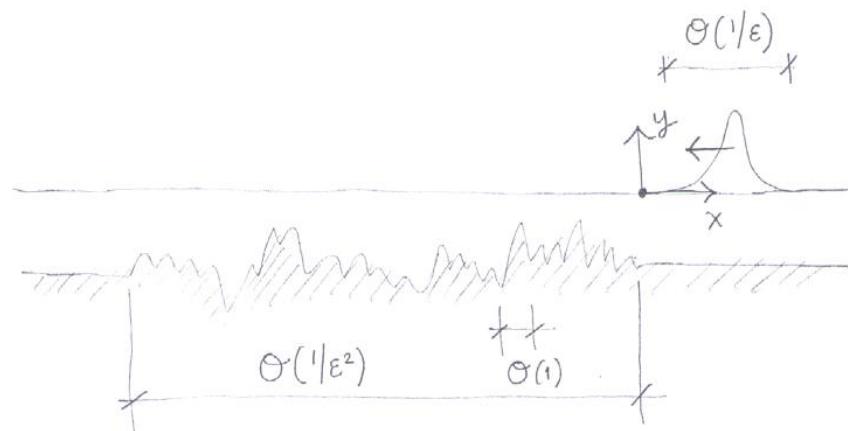
$$\beta \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad -h\left(\frac{x}{y}\right) < y < 0$$

$$\phi_{tt} + \frac{1}{\beta} \phi_y = 0, \quad y = 0$$

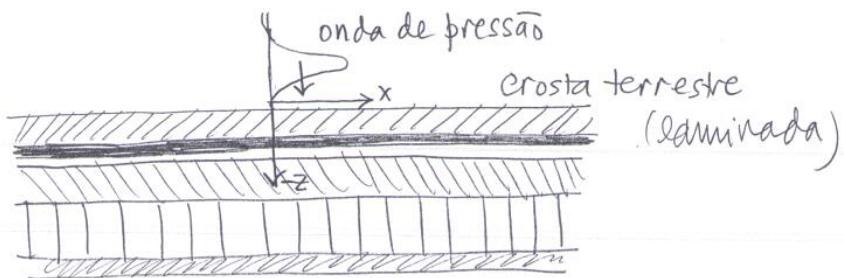
$$\phi_y + \frac{\beta}{y} h'\left(\frac{x}{y}\right) \phi_x = 0, \quad y = -h\left(\frac{x}{y}\right)$$

X

onde $h\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} 1, & x \leq -\gamma_L/\varepsilon^2, \quad x \geq 0 \\ 1+n\left(\frac{x}{y}\right), & -\gamma_L/\varepsilon^2 < x < 0 \end{cases}$



Esta escolha de geometria é em analogia com um problema em ondas acústicas onde



Para atacar o problema acima é conveniente fazermos uma mudança de coordenadas, relacionada ao Mapamento Conforme do canal. Sejam as coordenadas curvilineas ortogonais ξ e $\bar{\xi}$ e as coordenadas complexas

$$\boxed{z = x + i \sqrt{\beta} y} \quad \text{e} \quad \boxed{w = \xi + i \bar{\xi}}.$$

No plano complexo z (o domínio físico) o canal é rugoso.

No plano complexo w (o domínio computacional, de cálculo) o canal será plano. Como ϕ é uma função harmônica no plano- z ela também o será no plano- w . Logo no domínio computacional escrevemos o problema

na forma

$$\phi_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + \phi_{\xi\xi} = 0, \quad -\gamma_h < \bar{\xi} < 0$$

$$-(1+m(\xi))\phi_{tt} = \frac{1}{\gamma_h} \phi_{\bar{\xi}}, \quad \bar{\xi} = 0$$

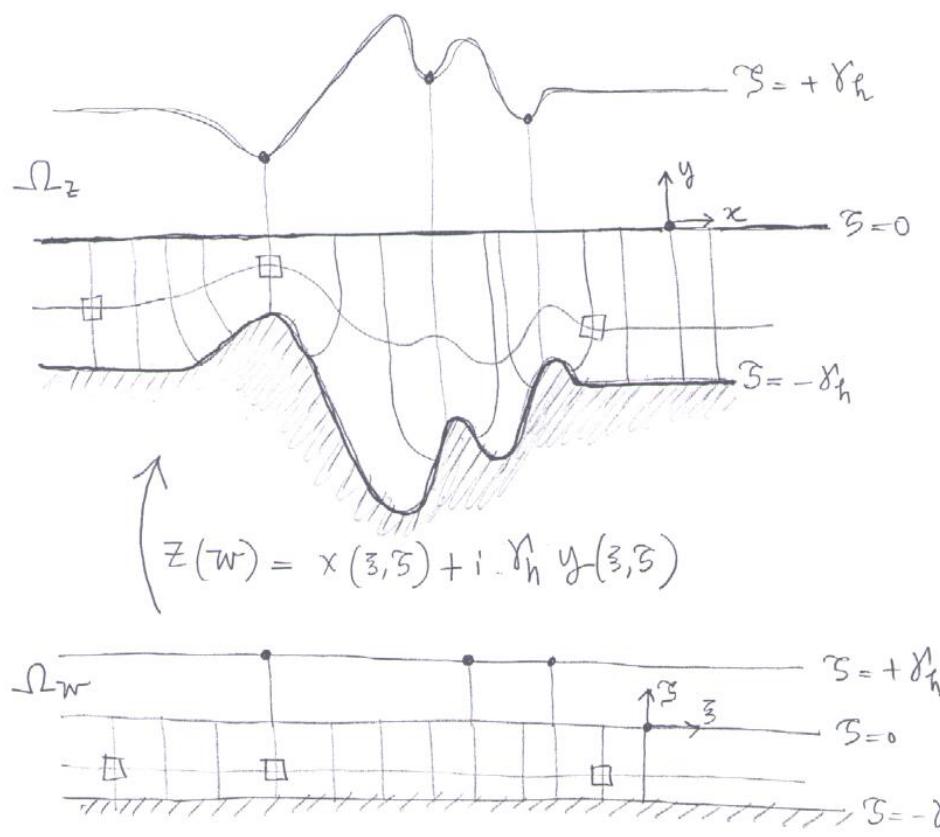
$$\phi_{\bar{\xi}} = 0, \quad \bar{\xi} = -\gamma_h$$

onde $\gamma_h = \sqrt{\beta} = h_0/\lambda$ on h_0/l_p , l_p = largura do pulso.

O coeficiente $(1+m(z)) = \frac{\partial y(z,0)}{\partial \bar{z}}$, Note que $x(z,s)$ e $y(z,s)$ são funções harmônicas no plano- w . Mais especificamente y satisfaz o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta y(z,s) &= 0, \quad -\gamma_h < s < +\gamma_h \\ y(z, \pm \gamma_h) &= \pm \gamma_h h \left(\frac{x(z, \pm \gamma_h)}{r} \right)\end{aligned}$$

A figura representativa deste problema geométrico é



A criação desta região simétrica facilita a resolução do problema de troca de variáveis.

O problema acima (em y) tem a seguinte função de Green, que se anula ao longo dos bordos de Ω_w :

$$G(w; w_0) = \operatorname{Re} \log \left(\frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{w}{\gamma_h}\right) - \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{w_0}{\gamma_h}\right)}{\exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{w}{\gamma_h}\right) + \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{w_0}{\gamma_h}\right)} \right)$$

onde Re representa a parte real. Usando a 2ª identidade de Green $\iint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dA = \oint_{\partial\Omega} (u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}) ds$, obtemos

$$y(z_0, \bar{z}_0) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} h(x(\bar{z}, -\gamma_h)) \left(G_z \Big|_{\bar{z}=+\gamma_h} + G_{\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=-\gamma_h} \right) d\bar{z}$$

ou ainda

$$y_{z_0}(z_0, 0) = \frac{\pi}{4\gamma_h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_h h(x(\bar{z}, -\gamma_h))}{\cosh^2 \left[\frac{\pi}{2\gamma_h} (\bar{z} - z_0) \right]} d\bar{z}$$

Não é difícil concluir, por Cauchy-Riemann, que

$$y_{\bar{z}}(z_0, 0) = x_{\bar{z}}(z_0, 0) = 1 + m(z) \quad \text{com } m(z) \in C^{\infty} \text{ dado por}$$

$$m(z) = \frac{\pi}{4\gamma_h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(x(\bar{z}, -\gamma_h))}{\cosh^2 \left[\frac{\pi}{2\gamma_h} (\bar{z} - z) \right]} d\bar{z}, \quad \text{e também que}$$

$$\lim_{\gamma_h \rightarrow 0} m(z) = n(x)$$

Se considerarmos ondas harmônicas no tempo o problema, no domínio computacional, é escrito (com variáveis x e y) na forma

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0, \quad -\delta_h < y < 0 \\ \omega^2 (1 + m(x)) \phi &= \frac{1}{\delta_h} \phi_y, \quad y = 0 \\ \phi_y &= 0, \quad y = -\delta_h \end{aligned}$$

onde, abusando da notação, assumo que

$$\phi(x, y, t) = e^{-i\omega t} \phi(x, y).$$

A solução deste problema pode ser escrita na forma de uma expansão em autofunções do problema não-perturbado. Temos 2 tipos de autofunções. As propagadoras,

onde

$$\phi_0(x, y) = e^{\pm i k_0 x} \psi_0(y),$$

com $\psi_0(y) = \cosh(k_0(\delta_h + y))$ e k_0 satisfazendo a relação de dispersão $\omega^2 = \frac{k_0 \tanh(k_0 \delta_h)}{\delta_h}$. E as autofunções evanescentes onde

$$\phi_j(x, y) = e^{\pm k_j x} \psi_j(y),$$

com $\psi_j(y) = \cos(k_j(\delta_h + y))$, e k_j obtido a partir de

$$\omega^2 = -\frac{k_j}{\delta_h} \tan(k_j \delta_h)$$

Note que os modos propagadores e os modos evanescentes são funções harmônicas satisfazendo as condições de Neumann no fundo. A partir de

$$\int_{-\gamma_h}^{\gamma_h} (\psi_j \psi_i'' - \psi_j'' \psi_i) dy$$

pode-se mostrar que as antifunções reduzidas $\Psi_j(y)$, $j=0,1,2,\dots$, formam um conjunto ortogonal.

A solução do problema perturbado é escrita na forma de uma série infinita:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & A_0(x) \cosh(k_0(\gamma_h + y)) e^{ik_0 x} + B_0(x) \cosh(k_0(\gamma_h + y)) e^{-ik_0 x} \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j(x) \cos(k_j(\gamma_h + y)) e^{-k_j(x + \gamma_L)} + B_j(x) \cos(k_j(\gamma_h + y)) e^{k_j x} \right]. \end{aligned}$$

Os modos evanescentes, com coeficiente A_j , decaem para a direita e por isso tem a sua "origem" à esquerda em $x = -\gamma_L$. Já os modos evanescentes B_j decaem para a esquerda.

Em analogia com a análise de Fourier, substitui-se a série acima na equação de Laplace e, projeção sobre cada componente, obtém-se um sistema de edo's para as amplitudes $A_j(x)$, $B_j(x)$, $j=0,1,2,\dots$. Aplicações sobre esta técnica podem ser encontradas nas referências Nachbin & Papamichael '92, Nachbin '93.

Eq de Boussinesq linearizada ($\alpha=0$)

Discussão de fluídos

DF 00/19A

tradicional

$$\hat{\eta} e^{i(kx-wt)}, \hat{u} e^{i(kx-wt)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + u_x = 0 \\ \end{array} \right. \rightarrow -iw\hat{\eta} + ik\hat{u} = 0$$

$$u_t + \eta_x + \frac{\beta}{3} \eta_{xxx} = 0 \rightarrow -iw\hat{u} + ik\hat{\eta} + \frac{\beta}{3}(ik)(-w^2)\hat{\eta} = 0$$

logo acima temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + u_x = 0 \\ \end{array} \right. \rightarrow -iw\hat{\eta} + ik\hat{u} = 0$$

$$u_t + \eta_x - \frac{\beta}{3} u_{xxx} = 0 \rightarrow -iw\hat{u} + ik\hat{\eta} - \frac{\beta}{3}(ik)^2(-iw)\hat{\eta} = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} -iw & ik \\ ik(1-\frac{\beta}{3}w^2) & -iw \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0$$

Det = 0 da analogia
de dispersão (*)

$$w^2 = k^2 (1 - \frac{\beta}{3} w^2)$$

$$(*) \Rightarrow w^2 \sim k^2 \left(1 - \frac{\beta}{3} k^2 + O(\beta^4) \right)$$

buscando série geométrica

$$\text{Note que } \frac{k}{\sqrt{\beta}} \tanh(k\sqrt{\beta}) \sim k^2 - \frac{\beta}{3} k^4 + \dots$$

$$\text{Note que para KdV-linear } w^2 \sim k^2 - \frac{\beta}{3} k^4 \rightarrow \text{para } \beta \text{ pequeno.}$$

$$\left(\begin{array}{cc} -iw & iw \\ ik & -iw(1 + \frac{\beta}{3} k^2) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0$$

$$w^2 = \frac{k^2}{1 + \frac{\beta}{3} k^2}$$

Q(k)

Note que o problema é fracamente dispersivo (ou seja, as aproximações não são para β pequeno).

Note que como mixtaramos derivadas em x com derivadas em t (nos termos dispersivos, então aparecem produtos de k com w , e isso implica que

aparece $w^2 = Q(k)$ como Q fracionária racional (que chamaremos aproximação de Padé).

Para a KdV-linear:

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \frac{\beta}{3} \eta_{xxx} &= 0 \\ -iw + ik + ik^3 \frac{\beta}{3} &= 0 \Rightarrow w = k - \frac{\beta}{3} k^3 \Rightarrow \frac{w}{k} = 1 - \frac{\beta}{3} k^2 \end{aligned}$$

$$\text{Para BBM: } (\eta_x = -\eta_t + O(k))$$

$$\eta_t + \eta_x - \frac{\beta}{3} \eta_{xxx} = 0 \Rightarrow w = \frac{k}{1 + \frac{\beta}{3} k^2} \approx k - \frac{\beta}{3} k^3 + \dots$$

$$\frac{w}{k} = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{3} k^2}$$



INTRODUÇÃO à DINÂMICA dos GASES

Veremos neste tópico alguns exemplos simples de escoamentos compressíveis em 1 dimensão.

Consideremos um escoamento isoentrópico, com a equação de estado $\phi = \phi(p)$ (c.f. DF36). As equações de Euler em 1D, são

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + uu_x = -\frac{1}{\rho} \phi_x \quad (\text{C. Mom.}) \\ p_t + u p_x + \rho u_x = 0 \quad (\text{C. Mass.}) \end{array} \right.$$

Usando a equação de estado temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + uu_x = -\frac{1}{\rho} \phi'(p) p_x \\ p_t + u p_x + \rho u_x = 0 \end{array} \right.$$

Para entender o tipo de escoamento púnico para este sistema tome

$$\begin{aligned} u &= \sum \tilde{u} \\ p &= p_0 + \varepsilon \tilde{p} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \ll 1, p_0 \text{ constante} \end{array} \right.$$

Estamos então considerando então o regime na vizinhança do equilíbrio estático. Substituindo na edp acima temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \tilde{u}_t + \varepsilon^2 \tilde{u} \tilde{u}_x = - \frac{1}{f_0 + \varepsilon \tilde{p}} \dot{\phi}'(f_0 + \varepsilon \tilde{p}) \varepsilon \tilde{p}_x \\ \varepsilon \tilde{p}_t + \varepsilon^2 \tilde{u} \tilde{p}_x + (f_0 + \varepsilon \tilde{p}) \varepsilon \tilde{u}_x = 0 \end{array} \right.$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \tilde{u}_t = - \frac{\varepsilon}{f_0} \dot{\phi}'(f_0) \tilde{p}_x + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \tilde{p}_t + \varepsilon f_0 \tilde{u}_x + O(\varepsilon^2) = 0 \end{array} \right.$$

Descartando os termos de ordem mais alta obtemos
o sistema LINEAR

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_t + \frac{\dot{\phi}'(f_0)}{f_0} \tilde{p}_x = 0 \\ \tilde{p}_t + f_0 \tilde{u}_x = 0 \end{array} \right.$$

que em notação matricial fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}'(f_0)/f_0 \\ f_0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores associados à matriz do sistema

São $\lambda = \pm \sqrt{\dot{\phi}'(f_0)}$, reais

Estudemos alguns exemplos de sistemas hiperbólicos.

Para um maior aprofundamento no assunto, consulte

Fritz John, *Partial Differential Equations*, Springer Verlag, 1982
4th. ed.

Ex: Considere a equação da onda a coeficientes variáveis

$$w_t + a(x,t) w_x = 0$$

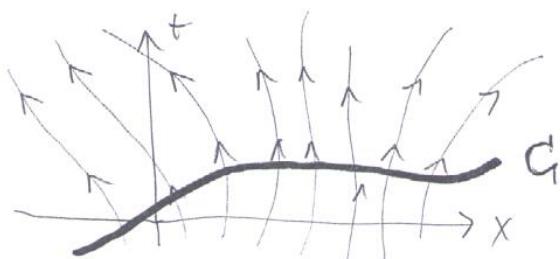
Neste caso é como se a velocidade do som dependesse do local e do tempo em questão.

As equações características são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dx}{ds} = a(x,t) \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} t = s \\ \frac{dx}{dt} = a(x,t) \end{array}}$$

Como consequência temos que

t constante ao longo de características. Para um problema de valor inicial temos $w(x_0, t)$ dada no instante inicial e para um problema de Cauchy os dados são fornecidos ao longo da curva G (ver figura).



Estamos supondo que p é monótona crescente com

DF139

$\phi'(p) > 0$, o que é fisicamente intuitivo. Se a densidade aumentar, a frenos aumenta juntamente,

Re-escrevendo o sistema com respeito à base dos autovalores vemos que a solução é uma combinação de funções na forma

$$f = f\left(x \pm \sqrt{\phi'(p_0)} t\right).$$

É natural então definir c . (com $c^2 = \phi'(p_0)$) como a velocidade do som. Note que pequenas variações de densidade ($\varepsilon \tilde{p}$) vagam pelo gás com velocidade c . Pela eq. de estado vemos que teremos ondas de frenos propagando com velocidade c . Daí o nome velocidade do som.

As equações para dinâmica dos gases em 1-dimensão são equações hiperbólicas quasilineares do tipo

$$\vec{w}_t + A(x, t, \vec{w}) \vec{w}_x = B(x, t, \vec{w})^*$$

onde $\vec{w} = \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}$, A não-linearidade vem dos termos

de transporte.

* Uma boa referência TEÓRICA e NUMÉRICA é LeVeque, RJ, Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser

A informação fornecida em C irá propagar ao longo das características.

Porque que as características não se cruzam?

Por causa da teoria de unicidade de edo's, supondo-se $a(x,t)$ com a regularidade necessária.

Como a equação acima seja não-homogênea temos

$$w_t + a(x,t) w_x = b(x,t) \quad \text{onde}$$

$$\frac{dw}{dt} = b(x(t), t) \quad , \text{ Integrando os dois lados}$$

obtemos

$$w(x(t), t) = w_0(x) + \int_0^t b(x(\alpha), \alpha) d\alpha .$$

Note que integrar ao longo de características é análogo a fazer a formulação lagrangiana. Veremos que para sistemas isto pode mudar* (caso 2×2 mais adiante).

Ex: Não-linear \rightarrow Eq. de Burgers

$$w_t + w w_x = 0$$

* as características não representam descrições lagrangianas de uma partícula. (ver DF143)

DF142

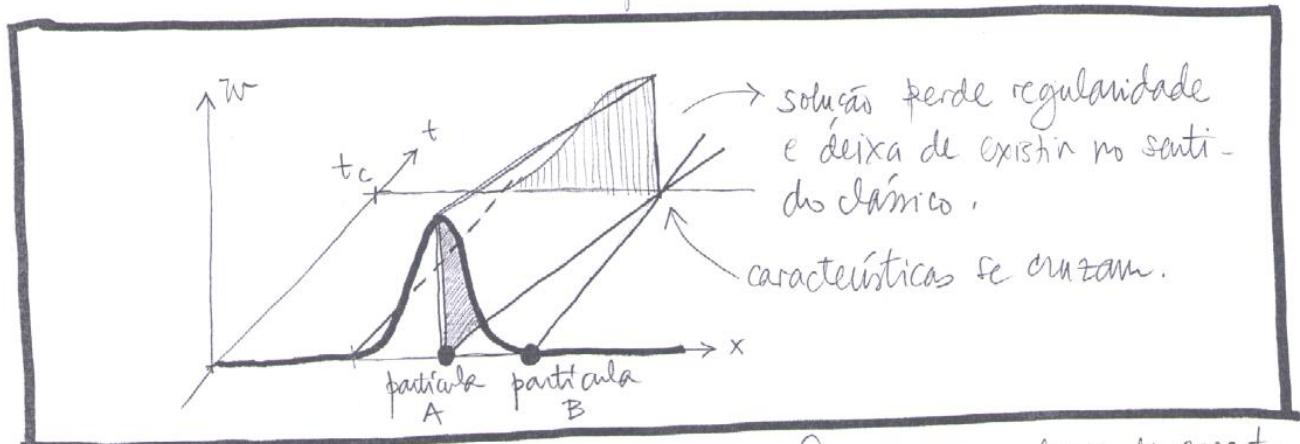
$$w_t + w w_x = \frac{Dw}{Dt} = 0$$

w = constante ao longo de características. Em livros de edp vemos isso na forma do sistema característico.

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = w, \quad \frac{dw}{ds} = 0, \quad \text{onde o}$$

diferencial total nada mais é do que a derivada material. \times
convectiva

Neste caso as características podem se interceptar.



Porque as características são retas? $\int w \text{ const. ao longo de carad.}$
 $\left(\frac{dx}{dt} = w \Rightarrow \text{reta} \right)$

Se a condição inicial é dada por $w(x_0) = h(x)$, então
o tempo crítico é dado por $t_c = \frac{-1}{h'(x_0)}$, onde x_0 é
o mínimo de $h'(x)$. Na figura acima x_0 irá corresponder
ao ponto onde h' é negativo, com maior valor absoluto.

Este é o instante em que um choque se forma.

Em modelos de águas rasas este é o instante em que a onda quebra.

No caso de sistemas da forma

$$\vec{w}_t + A(x, t, \vec{w}) \vec{w}_x = 0$$

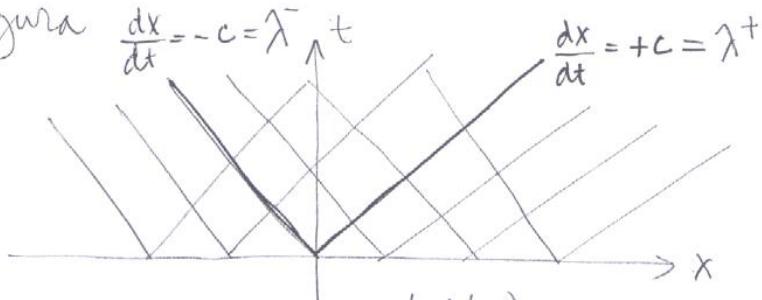
temos que as equações características são da forma

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dx}{ds} = \lambda(x, t, \vec{w}) \end{cases}$$

onde λ são os autovalores de A . Vamos supor que o sistema é esteticamente hiperbólico ou seja, os autovalores são simples (não-repetidos) e reais.

Este era o caso do modelo de dinâmica de gases visto acima. No caso linearizado achamos $\lambda = \pm \sqrt{p'(p_0)} = \pm c$

Isto nos dà a figura



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = +c & (\text{informação que viaja para a direita}) \\ \frac{dx}{dt} = -c & (\text{" " " " " esquerda}) \end{cases}$$

? (e não a
particular!)

No caso não-linear tínhamos

$$\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & p'(p)/p \\ p & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}_x = 0,$$

O polinômio característico é

$$(x-u)^2 - p'(p) = 0 \quad \text{e o discriminante é}$$

$$\phi^2 - 4ac = 4u^2 - 4(u^2 - p'(p)) > 0. \quad \text{Consequentemente}$$

o sistema é estiticamente hiperbólico, já que $p'(p) > 0$.

As curvas características são dadas por

$$\boxed{\frac{dt}{ds} = 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx^+}{ds} &= \lambda^+ = u + c \\ \frac{dx^-}{ds} &= \lambda^- = u - c \end{aligned}}$$

v

Curvas características são curvas com a seguinte propriedade:

Se os dados forem fornecidos ao longo destas curvas especiais, a edp não nos dará condições de obter valores da solução para esta curva.

Gases isentrópicos : $\dot{p} = p(p)$.

$$\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & p'(p)/\rho \\ p & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}_x = 0$$

$$\boxed{\lambda^\pm = u \pm c}, \quad c = \sqrt{p'(p_0)}$$

Aguas Paras:

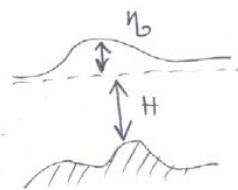
$$\begin{cases} u_t + u u_x + g h_x = 0 \\ h_t + (u h)_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ h \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u^2 + gh \\ uh \end{bmatrix}_x = 0$$

$$\boxed{\lambda^\pm = u \pm \sqrt{gh'}}$$

Analogia com Dinâmica dos Gases : Stoker
fdo 5 (28/3/84) Acharon 102 & ex. 3.22

Definir $\bar{p} = p(\eta + H)$, $h = \eta + H$



$\bar{p} = \int_{-H}^h p dy$, força por unidade de "langura".

pensar em hidrostática, então

$$p = pg(\eta + H) \Rightarrow \bar{p} = \frac{pg}{2} (\eta + h)^2 = \frac{g}{2p} \bar{p}^2$$

$$\boxed{\bar{p} = A \bar{p}^\delta, \text{ com } \delta=2, A = \frac{g}{2p}} \quad \text{gás politrópico}$$

DF37

Barragem que rompe.

Por exemplo, ao longo de uma curva parametrizada por s temos que

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} = -Aw_x \frac{dt}{ds} + w_x \frac{dx}{ds}$$

ou então

$$\left[-A \frac{dt}{ds} + \frac{dx}{ds} I \right] w_x = \frac{dw}{ds}$$

Nós conseguiremos calcular w_x a partir dos dados $\frac{dw}{ds}$ ao longo da curva quando

$\left[A \frac{dt}{ds} - \frac{dx}{ds} I \right]$ for singular, que é o caso quando

$$\frac{dt}{ds} = 1 \text{ e } \frac{dx}{ds} = f(x, t, w)$$

Calulemos agora os invariantes de Riemann, ou seja, funções que são constantes ao longo de características.

Vejamos:

$$\frac{df}{ds} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial w_k} \frac{dw_k}{ds} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial w_k} \left(- \sum_{j=1}^n A_{kj} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\frac{df}{ds} = - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial w_k} A_{kj} \right) \frac{\partial w_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^n x \frac{\partial f}{\partial w_j} \frac{\partial w_j}{\partial x}$$

DF146

$$\frac{df}{ds} = \sum_{j=1}^n \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial w_k} A_{kj} + \lambda \frac{\partial f}{\partial w_j} \right) \frac{\partial w_j}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{df}{ds} = 0} \quad \text{se} \quad \boxed{\sum_{k=1}^n A_{jk}^T \frac{\partial f}{\partial w_k} = \lambda \frac{\partial f}{\partial w_j}}$$

em outras palavras se $\boxed{A^T \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}}$ onde

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial w_1} \\ \frac{\partial f}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial w_n} \end{bmatrix}$$

Se juntarmos adquirir n funções, digamos $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, constantes ao longo das características talvez formarmos invertê-las para obter uma expressão para \vec{w} .

Vejamos o exemplo de dinâmica dos gases.

$$\begin{bmatrix} u & p \\ c^2/p & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^\pm \\ h_2^\pm \end{bmatrix} = (u \pm c) \begin{bmatrix} h_1^\pm \\ h_2^\pm \end{bmatrix}$$

Os auto vetores à esquerda de A são

$$\begin{bmatrix} h_1^\pm \\ h_2^\pm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm c/p \end{bmatrix}$$

DF147

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial p} = \pm \frac{c}{p} \end{cases}$$

Da primeira equação temos $f = u + g_1(p)$.

Da segunda equação temos $f = \pm \int^p \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi + g_2(u)$

Concluindo que

$$f = (f^+, f^-) \quad \text{onde}$$

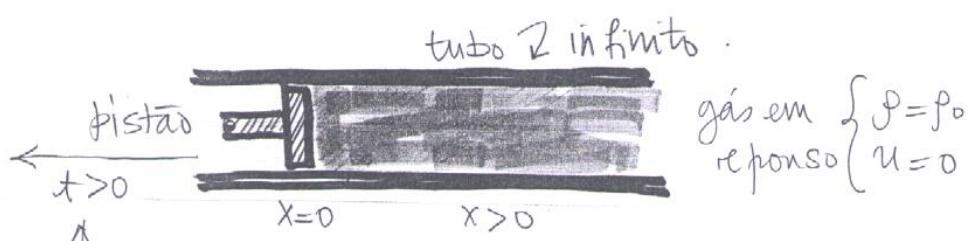
$$f^\pm \equiv u \pm \int^p \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi , \quad \text{e } f^+ \text{ é constante ao}$$

longo da característica C^+ : $\left(\frac{dx}{dt} = \lambda^+ \right)$ e f^- ao

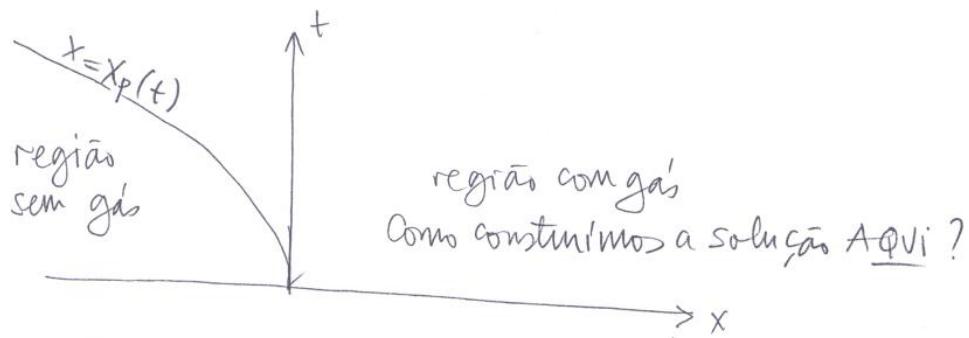
longo da característica C^- : $\left(\frac{dx}{dt} = \lambda^- \right)$.



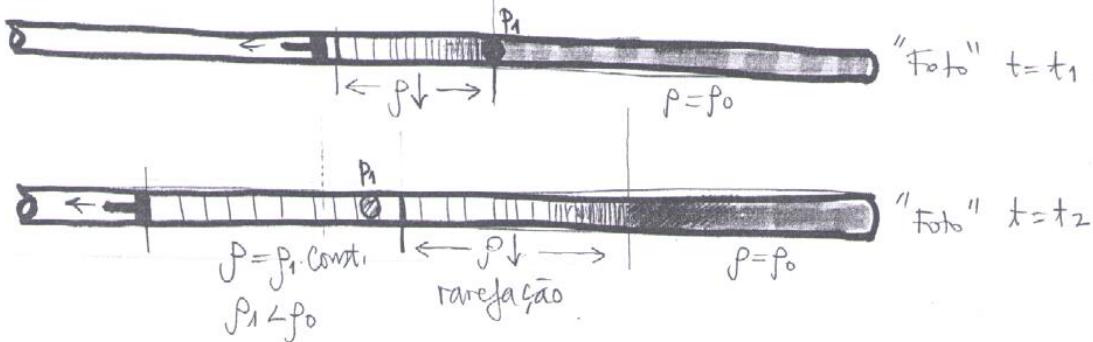
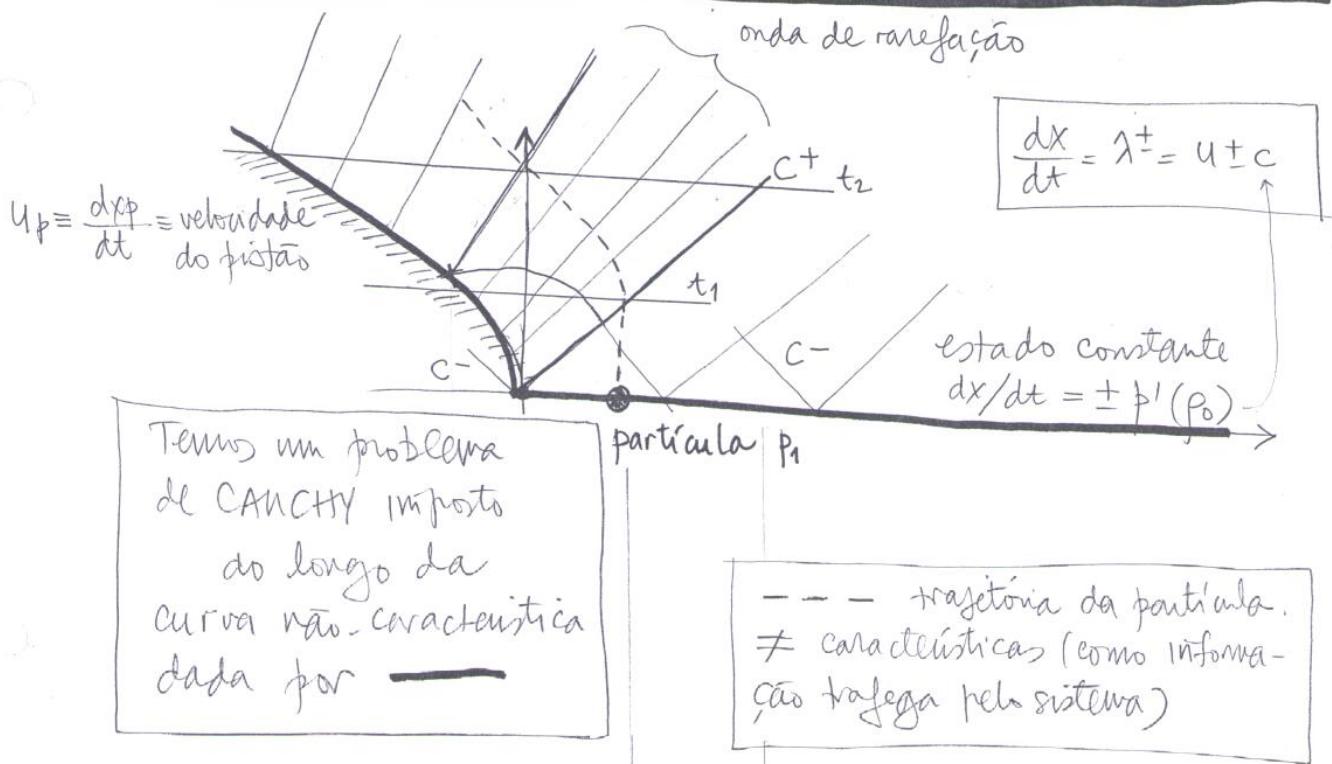
Problema do Pistão



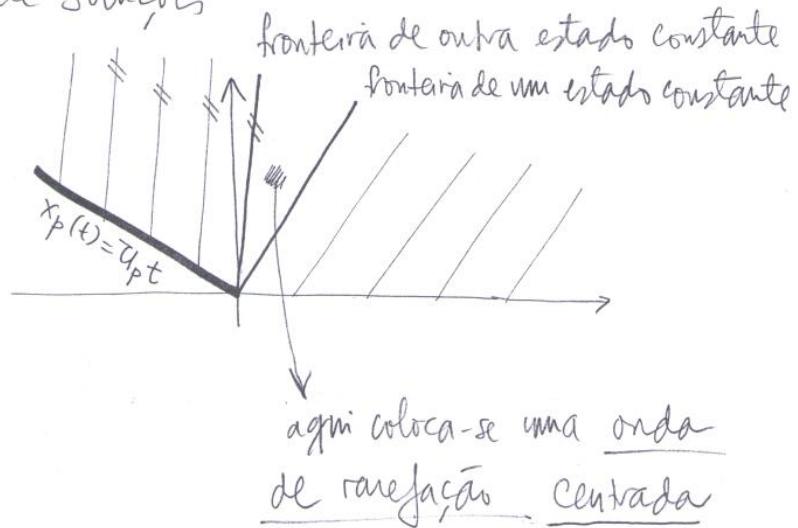
puxamos a partir do instante inicial.



a curva $x = x_p(t)$ é a trajetória do pistão.



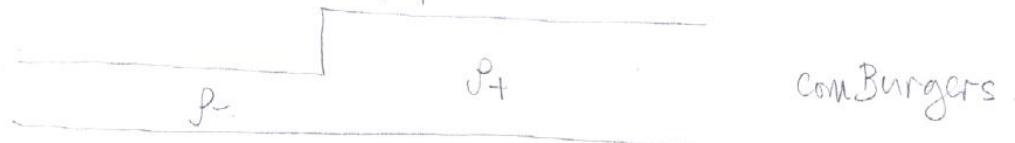
Um pouco mais destes aspectos **QUANTITATIVOS** da
constuição de soluções,



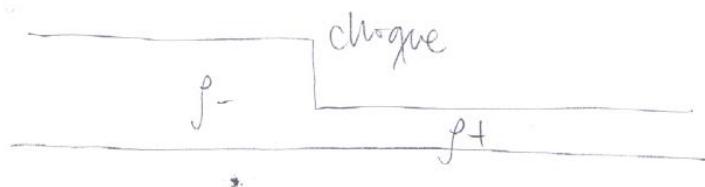
Problema de Riemann

→ modelo simplificado

rarefações



chocque



- Parte datilografada não precisa escrever. Eu copio depois.
- Figuras → deixe um vazio
- Situações do tipo

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

viscosidade (constante)

Pode colocar em outra linha e deixar solto. Depois eu componho.

- As "caixas" → $\boxed{\frac{1}{3} \sum \delta_{ii}}$ não precisa colocar.